CORRIGÉ

NOM - Prénom :

BCPST 12
Interrogation écrite $n^o 5$.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 5. SUJET A.

Vendredi 18 octobre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\underbrace{3\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)}_{\text{forme } a\cos x + b\sin x \text{ avec } (a,b)\neq(0,0)} = \sqrt{6}$ (E)

on factorise par $\sqrt{a^2+b^2}$. ici $2\sqrt{3}$

$(E) \iff 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = \sqrt{6}$

$\iff 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) = \sqrt{6}$

$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\iff x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right\}}$$

Exercice 2

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $z = -ie^{i\theta}$. Déterminer, en fonction de θ :

1. Le module et un argument de z.
2. La partie réelle et la partie imaginaire de z.

(1) $|z| = \underbrace{|-i|}_{=1} \times \underbrace{|e^{i\theta}|}_{=1} = 1$ donc $\boxed{|z| = 1}$

$z = e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\theta} = e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$ donc $\boxed{\theta - \frac{\pi}{2} \text{ est un argument de } z}$

(2) $z = -i(\cos\theta + i\sin\theta) = \sin\theta - i\cos\theta$ avec $(\sin\theta, -\cos\theta) \in \mathbb{R}^2$

Donc $\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Re}(z) = \sin\theta \\ \mathrm{Im}(z) = -\cos\theta \end{array}}$

Exercice 3

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$ fixés. On pose $z = \left[e^{i\theta}\cos(\theta)\right]^n$.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z.

$z = e^{in\theta} \cos^n\theta$ (formule de Moivre)

$= \cos^n\theta \,(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

$= \underbrace{\cos^n\theta \cos n\theta}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\sin n\theta \cos^n(\theta)}_{\in \mathbb{R}}$

On en déduit $\boxed{\mathrm{Re}(z) = \cos^n\theta \cos n\theta \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \cos^n\theta \sin n\theta}$

Exercice 4

Résoudre sur $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z + 4 = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique.

Il s'agit d'une équation du second degré

Elle a pour discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 = -12 < 0$

Elle a donc 2 racines complexes conjuguées :

$\dfrac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$ et $1 + i\sqrt{3}$

Forme trigonométrique des racines :

$|1 - i\sqrt{3}| = 2$. $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

et $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{2e^{i\frac{\pi}{3}}, 2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}}$$

NOM - Prénom : CORRIGÉ

BCPST 12
Interrogation écrite n^o5.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 5. SUJET B.

Vendredi 18 octobre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\underbrace{\sqrt{3}\cos(x) + 3\sin(x)}_{\text{forme } a\cos x + b\sin x} = 3$ (E)

forme $a\cos x + b\sin x$ avec $(a,b) \neq (0,0)$: on factorise par $\sqrt{a^2+b^2}$. ici : $\sqrt{12}$

$(E) \iff 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 3$

$\iff \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$

$\iff x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}}$

Exercice 2

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $z = ie^{-i\theta}$. Déterminer, en fonction de θ :

1. Le module et un argument de z.
2. La partie réelle et la partie imaginaire de z.

① • $|z| = \underbrace{|i|}_{1} \times \underbrace{|e^{-i\theta}|}_{1}$ donc $\boxed{|z| = 1}$

• on écrit $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, d'où $z = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\theta} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$

donc $\boxed{\frac{\pi}{2} - \theta \text{ est un argument de } z}$

② $z = i(\cos\theta - i\sin\theta) = -i^2\sin\theta + i\cos\theta = \sin\theta + i\cos\theta$

avec $(\sin\theta, \cos\theta) \in \mathbb{R}^2$, donc $\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Re}\, z = \sin\theta \\ \mathrm{Im}\, z = \cos\theta \end{array}}$

Exercice 3
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$ fixés. On pose $z = \left[e^{i\theta}\sin(\theta)\right]^n$.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z.

$z = (e^{i\theta})^n \sin^n\theta = e^{in\theta}\sin^n\theta$ (formule de Moivre)

donc $z = \sin^n\theta\,(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$= \underbrace{\sin^n\theta\cos(n\theta)}_{\in\mathbb{R}} + i\,\underbrace{\sin^n\theta\sin(n\theta)}_{\in\mathbb{R}}$

On en déduit : $\boxed{Re(z) = \sin^n\theta\cos(n\theta) \quad \text{et} \quad Im(z) = \sin^n\theta\sin(n\theta)}$

Exercice 4
Résoudre sur $\mathbb{C}$: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique.

Il s'agit d'une équation du second degré.
Elle a pour discriminant $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4\times4 = 12-16 = -4 < 0$
Il y a donc 2 racines complexes conjuguées :

$\dfrac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i$ et $\sqrt{3} + i$

Forme trigonométrique :

$|\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{2e^{-i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{\pi}{6}}\right\}}$$