NOM - Prénom : CORRIGÉ

BCPST 12
Interrogation écrite $n^o 6$.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 6. SUJET A.

Vendredi 8 novembre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? Préciser, dans le cas où elles sont bijectives, leur application réciproque.

1.

$$f : \begin{array}{rcl} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

- f est strictement décroissante donc $\boxed{f \text{ est injective}}$
- $2 \in \mathbb{R}$ (ensemble d'arrivée)
  2 n'a pas d'antécédent car $\forall x \in [0,\pi]$, $-1 \leq \cos x \leq 1$
  donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$

2.

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

voir sujet B

3.

$$h : \begin{array}{rcl}]-\infty,3[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(3-x) \end{array}$$

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Étudions l'équation suivante, d'inconnue $x \in]-\infty,3[$: $h(x)=y_0$.

$$\begin{aligned} h(x)=y_0 &\iff \ln(3-x)=y_0 \\ &\iff 3-x=e^{y_0} \\ &\iff x=3-e^{y_0} \quad (\in]-\infty,3[\text{ car } e^{y_0}>0) \end{aligned}$$

L'équation admet une unique solution. Donc y_0 admet un unique antécédent. Donc h est bijective, et son application réciproque est :

$$h^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]-\infty,3[\\ y & \mapsto & 3-e^{y} \end{array}$$

4.

$$k : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}$$

$\circledast$ $1 \in \mathbb{C}$, $-1 \in \mathbb{C}$
$1 \neq -1$ et $k(1) = k(-1)$ } donc $\boxed{k \text{ n'est pas injective}}$

$\circledast$ Soit $y_0 \in \mathbb{C}$ fixé quelconque.
Si $y_0 = 0$, $k(0) = 0$
Si $y_0 \neq 0$, il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $y_0 = re^{i\theta}$
alors $z = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ est un antécédent de y_0 car $z^2 = y_0$.
Dans tous les cas, $\boxed{y_0 \text{ admet un antécédent par } k.}$

Exercice 2

Soient E et F deux ensembles et soit g une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E. Montrer que si g est injective, alors $g(A) \cap g(B) \subset g(A \cap B)$.
On accordera un soin particulier à la rédaction.

On suppose que g est injective

Montrons que $g(A) \cap g(B) \subset g(A \cap B)$:

Soit $y \in g(A) \cap g(B)$ fixé quelconque.

$y \in g(A)$ donc il existe $x \in A$ tel que $y = g(x)$

$y \in g(B)$ donc il existe $x' \in B$ tel que $y = g(x')$

Ainsi, $g(x) = g(x')$. Or g est injective, donc $x = x'$

Ainsi, $\begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$ car $x' \in B$ et $x = x'$

donc $\begin{cases} x \in A \cap B \\ y = g(x) \end{cases}$, donc $y \in g(A \cap B)$

On en déduit que $g(A) \cap g(B) \subset g(A \cap B)$

CORRIGÉ

NOM - Prénom : **BCPST 12**

Interrogation écrite $n^o 6$.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 6. SUJET B.

Vendredi 8 novembre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? Préciser, dans le cas où elles sont bijectives, leur application réciproque.

1.
$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Soit $y_0 \in \mathbb{R}_+$ fixé quelconque.
Étudions l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) = y_0 \iff x^2 = y_0$

$\iff x = \sqrt{y_0}$ ou $x = -\sqrt{y_0}$ car $y_0 \geq 0$

L'équation admet au-moins une solution donc y_0 admet au-moins un antécédent.
Donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$
Elle n'est $\boxed{\text{pas injective}}$ car par exemple, $\begin{cases} 2 \neq -2 \\ 2, -2 \in \mathbb{R} \text{ (ens. de départ)} \\ f(2) = f(-2) \end{cases}$

2.
$$g: \begin{array}{rcl} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

- g est strictement croissante donc $\boxed{g \text{ est injective}}$
- $2 \in \mathbb{R}$ mais 2 n'a pas d'antécédent car $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $-1 \leq \sin x \leq 1$

Donc $\boxed{g \text{ n'est pas surjective}}$

3.
$$h: \begin{array}{rcl}]-\infty, 2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(2-x) \end{array}$$

Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Étudions l'équation suivante, d'inconnue $x \in]-\infty, 2[$: $h(x) = y_0$

$h(x) = y_0 \iff \ln(2-x) = y_0$

$\iff 2 - x = e^{y_0}$

$\iff x = 2 - e^{y_0}$ ($\in]-\infty, 2[$ car $e^{y_0} > 0$)

L'équation admet une unique solution. Donc y_0 admet un unique antécédent. Donc h est bijective, et son application réciproque est :

$$h^{-1}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]-\infty, 2[\\ y & \mapsto & 2 - e^y \end{array}$$