

Corrigé du devoir maison n° 4

Exercice 1 - Calculs.

1. (a) Il s'agit de 5-combinaisons d'un ensemble de cardinal 7 donc il y a $\binom{7}{5} = 21$ tirages possibles.
- (b) Il s'agit de 4-listes (avec d'éventuelles répétitions) d'un ensemble de cardinal 10 donc il y a 10^4 codes possibles.
- (c) Pour construire un anagramme,
- on place les 2 C : $\binom{8}{2}$ choix
 - on place les 2 O dans les 6 places restantes : $\binom{6}{2}$ choix
 - on place les 4 lettres restantes dans les 4 places. Il s'agit donc de permutations : $4!$ choix
- Il y a donc $\binom{8}{2} \binom{6}{2} 4! = \frac{8!}{2!2!}$ anagrammes.
- (d) Chaque ligne correspond à un choix de 2 villes parmi les 20 donc il y a $\binom{20}{2} = 190$ lignes.
- (e) Soit n le nombre de villes desservies. Comme à la question précédente, le nombre de lignes est donc $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. On cherche donc n tel que $\frac{n(n-1)}{2} = 45$ ou encore $n(n-1) = 90$.
On remarque alors que $9 \times 10 = 90$ donc $n = 10$.
Ou alors, on peut calculer le discriminant et en déduire les racines.

2.

$$\begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ 2x + 3y - z + t = 1 \\ 4x + 6y - 2z + 2t = 2 \\ x + 2y - 2z + 2t = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ y - 3z + 3t = -3 & L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ 2y - 6z + 6t = -6 & L3 \leftarrow L3 - 4L1 \\ y - 3z + 3t = \lambda - 2 & L4 \leftarrow L4 - L1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ y - 3z + 3t = -3 \\ 0 = 0 & L3 \leftarrow L3 - 2L2 \\ 0 = \lambda + 1 & L4 \leftarrow L4 - L1 \end{cases}$$

Ce système est échelonné, avec deux équations de compatibilité. Il est de rang 2.

Si $\lambda \neq -1$, le système est incompatible. Donc l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

Si $\lambda = -1$, les équations de compatibilité sont satisfaites. Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ y - 3z + 3t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 - z + t \\ y = -3 + 3z - 3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 4z + 4t \\ y = -3 + 3z - 3t \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{(5 - 4z + 4t, -3 + 3z - 3t, z, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 2 - Étude d'une suite récurrente.

1. Étude de f

- (a) f est une fraction rationnelle. Son dénominateur s'annule uniquement en $x = -\frac{1}{2}$.

Donc f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

- (b) f est une fraction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, $\mathcal{D}$,

et $\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \frac{3}{(1+2x)^2}$.

- (c) $\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur les intervalles qui composent son ensemble de définition :

f est strictement croissante sur $] -\infty, -\frac{1}{2}[$ et strictement croissante sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$.

2. Étude d'une suite.

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n \ll u_n \text{ existe et } 0 < u_n < 1 \gg$$

• **Initialisation** : $u_0 = \frac{1}{2}$ d'après l'énoncé. Donc $0 < u_0 < 1$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

Alors $0 < u_n < 1$ donc $u_n \neq -\frac{1}{2}$. Donc $u_n \in \mathcal{D}$. Ainsi, $f(u_n)$ existe. De plus, $0 < u_n < 1$ et f est strictement croissante sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$. Donc $f(0) < f(u_n) < f(1)$. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Ainsi, $0 < u_{n+1} < 1$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• **Conclusion** : Ainsi, d'après le principe de récurrence,

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

- (b) Puisque la suite est à termes strictement positifs, on peut étudier le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1.

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{1+2u_n}$. Or $0 < u_n < 1$ donc $0 < 1+2u_n < 3$. Donc, en appliquant la fonction inverse, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{3} < \frac{1}{1+2u_n}$. D'où $1 < \frac{3}{1+2u_n}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- (c) On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - u_n \neq 0$.

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

- (d) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{3u_n}{1+2u_n} \times \frac{1}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1+2u_n-3u_n} = 3 \frac{u_n}{1-u_n} = 3v_n$.

On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3.

- (e) On déduit de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3^n v_0$. Or $v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = 1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3^n$.

- (f) Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$, on a $v_n - v_n u_n = u_n$, donc $u_n(1+v_n) = v_n$. Or $v_n > 0$ (c'est 3^n) donc $1+v_n > 0$. On en déduit : $u_n = \frac{v_n}{1+v_n}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^n}{1+3^n}$.

- (g) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3^n}{3^n(1+\frac{1}{3^n})} = \frac{1}{1+(\frac{1}{3})^n}$.

Or $\|\frac{1}{3}\| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. On en déduit, par somme puis quotient des limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

3. Informatique

(a)

```

1 def suite(n):
2     u = 1/2
3     for i in range(n):
4         u = 3*u/(1+2*u)
5     return u

```

```

1 def produit(n):
2     u = 1/2
3     p = u
4     for i in range(n):
5         u = 3*u/(1+2*u)
6         p = p * u
7     return p

```

(b)

```

1 def assez_grand(e):
2     u = 1/2
3     n = 0
4     while u <= 1-e:
5         u = 3*u/(1+2*u)
6         n = n + 1
7     return n

```

Exercice 3 - EDL du premier ordre.

1. La fonction $t \mapsto \frac{t^3 + t^2 + 1}{t^2 + t - 2}$ est continue sur $]1, +\infty[$ donc l'équation est bien définie sur $]1, +\infty[$.

2. Soit $(E_H) : y' - y = 0$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène.

Donc, $S_H = \left\{ \begin{array}{l}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda \cdot e^t \end{array} , \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Pour $t \in]1, +\infty[$, on pose $h(t) = \frac{t^3 + t^2 + 1}{t^2 + t - 2}$.

(a) On raisonne par analyse-synthèse.

i. **Analyse** Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall t \in]1, +\infty[, h(t) = t + \frac{at + b}{t^2 + t - 2}$$

$$\text{Alors, } \forall t \in]1, +\infty[, h(t) = \frac{t^3 + t^2 - 2t + at + b}{t^2 + t - 2} = \frac{t^3 + t^2 + (a-2)t + b}{t^2 + t - 2}.$$

Par identification, $a = 2$ et $b = 1$.

ii. **Synthèse** On vérifie ensuite que ces deux réels conviennent bien.

(b) La fonction h est continue sur $]1, +\infty[$ donc elle admet des primitives sur $]1, +\infty[$.

En utilisant l'expression de h obtenue à la question précédente, on peut prendre H définie par

$$\forall t \in]1, +\infty[, H(t) = \frac{t^2}{2} + \ln(t^2 + t - 2).$$

4. On va appliquer la méthode de variation de la constante.

On cherche f_1 sous la forme $\forall t \in]1, +\infty[, f_1(t) = \lambda(t)e^t$. On a $\forall t \in]1, +\infty[, f_1'(t) = \lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t$.

$$f_1 \text{ est solution de } (E_1) \Leftrightarrow \forall t \in]1, +\infty[, \lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t - \lambda(t)e^t = \frac{t^3 + t^2 + 1}{t^2 + t - 2}e^t$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in]1, +\infty[, \lambda'(t)e^t = \frac{t^3 + t^2 + 1}{t^2 + t - 2}e^t$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in]1, +\infty[, \lambda'(t) = \frac{t^3 + t^2 + 1}{t^2 + t - 2} = h(t)$$

Donc, on peut prendre $\forall t \in]1, +\infty[, \lambda(t) = H(t) = \frac{t^2}{2} + \ln(t^2 + t - 2)$.

Donc, $\forall t \in]1, +\infty[, f_1(t) = \left[\frac{t^2}{2} + \ln(t^2 + t - 2) \right] e^t$

5. On pose $\forall t \in]1, +\infty[, f_2(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
On a $\forall t \in]1, +\infty[, f_2'(t) = -\lambda \sin(t) + \mu \cos(t)$.

$$\begin{aligned} f_2 \text{ est solution de } (E_2) &\Leftrightarrow \forall t \in]1, +\infty[, -\lambda \sin(t) + \mu \cos(t) - \lambda \cos(t) - \mu \sin(t) = \cos(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in]1, +\infty[, (\mu - \lambda) \cos(t) + (-\lambda - \mu) \sin(t) = \cos(t) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu - \lambda = 1 \\ -\lambda - \mu = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \lambda + 1 \\ -2\lambda = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\forall t \in]1, +\infty[, f_2(t) = \frac{\sin(t) - \cos(t)}{2}}$.

6. Par le principe de superposition, $f_1 + f_2$ est une solution particulière de (E) . On en déduit que

$$S = \left\{ \begin{array}{l}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda \cdot e^t + \left[\frac{t^2}{2} + \ln(t^2 + t - 2) \right] e^t + \frac{\sin(t) - \cos(t)}{2}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Exercice 4 - EDL du second ordre.

1. On note $(E_\alpha) : y'' - \alpha y = 0$. C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, homogène. Elle a pour équation caractéristique $r^2 - \alpha = 0$.

Si $\alpha = 0$:

L'équation caractéristique admet 0 pour racine double (cas $\Delta = 0$).

Donc l'ensemble des solutions de (E_0) est $\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto At + B \end{array} \quad , (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Si $\alpha < 0$:

L'équation caractéristique admet deux racines complexes $i\sqrt{-\alpha}$ et $-i\sqrt{-\alpha}$ (cas $\Delta < 0$).

Donc l'ensemble des solutions de (E_α) est $\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto A \cos(t\sqrt{-\alpha}) + B \sin(t\sqrt{-\alpha}) \end{array} \quad , (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Si $\alpha > 0$:

L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $\sqrt{\alpha}$ et $-\sqrt{\alpha}$ (cas $\Delta > 0$).

Donc l'ensemble des solutions de (E_α) est $\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto Ae^{t\sqrt{\alpha}} + Be^{-t\sqrt{\alpha}} \end{array} \quad , (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

2. Soit f et g deux fonctions définies sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On suppose que $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $g(t) = f(t) \cos(t)$. On pose $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

- (a) On doit montrer une équivalence (« si et seulement si »). On va faire une démonstration en deux temps.

- On suppose que f est dérivable sur I .

Alors g est le produit de deux fonctions dérivables sur I , f et $\cos$. Donc g est dérivable sur I .

- Réciproquement, on suppose que g est dérivable sur I . Alors, puisque la fonction cosinus ne s'annule pas sur I , $\forall t \in I$, $f(t) = \frac{g(t)}{\cos(t)}$. Donc f est le quotient de deux fonctions dérivables sur I , le dénominateur ne s'annulant pas sur I . Donc f est dérivable sur I .

- (b) Par formule de dérivation d'un produit de fonctions dérivables,

$$\boxed{\forall t \in I, g'(t) = f'(t) \cos(t) - f(t) \sin(t) \text{ et } g''(t) = f''(t) \cos(t) - 2f'(t) \sin(t) - f(t) \cos(t)}.$$

- (c) On suppose que f et g sont deux fois dérivables sur I . Déterminons une condition nécessaire et

suffisante pour que f soit solution de (E) sur I :

$$\begin{aligned}
 f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I &\iff \forall t \in I, f''(t) \cos(t) - 2f'(t) \sin(t) + 3f(t) \cos(t) = 0 \\
 &\iff \forall t \in I, \underbrace{(f''(t) \cos(t) - 2f'(t) \sin(t) - f(t) \cos(t))}_{g''(t)} + 4 \underbrace{f(t) \cos(t)}_{g(t)} = 0 \\
 &\iff \forall t \in I, g''(t) + 4g(t) = 0 \\
 &\iff g \text{ est solution de } (E') : y'' + 4y = 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de $(E') : y'' + 4y = 0$

(d) D'après la première question (à adapter sur I), l'ensemble des solutions de (E') sur I est

$$\left\{ \begin{array}{ll} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto A \cos(2t) + B \sin(2t) \end{array} \right. , (A, B) \in \mathbb{R}^2 \}$$

(e) On en déduit l'ensemble des solutions de (E) sur I :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto A \frac{\cos(2t)}{\cos(t)} + 2B \sin(t) \end{array} \right. , (A, B) \in \mathbb{R}^2 \}$$