NOM - Prénom : CORRECTION

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 7. SUJET A.

Vendredi 22 novembre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Soit la suite définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$$

Déterminer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x + 2 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = -4 < 0$ et pour racines $1+i$ et $1-i$

Avec $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Il existe donc $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2}^n \left(A \cos \frac{n\pi}{4} + B \sin \frac{n\pi}{4}\right)$

Avec $\begin{cases} u_0 = 1 = A \\ u_1 = 2 = \sqrt{2}\left(A\frac{\sqrt{2}}{2} + B\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$

donc $\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 2 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)}$

Exercice 2 Répondre aux questions suivantes. On donnera les réponses sous forme de coefficients binomiaux (ou produits de coefficients binomiaux) ou de factorielles (ou produits de factorielles). **On ne justifiera pas les réponses.**

1. Une urne contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. On tire **successivement et sans remise** 6 jetons de cette urne.

   (a) Combien y a t-il de tirages possibles ?

Un tirage est une 6-liste sans répétition d'éléments de $[\![1,20]\!]$

Il y a donc $\boxed{A_{20}^{6} = \frac{20!}{14!} \text{ tirages possibles}}$

   (b) Combien y a t-il de tirages ne contenant que des numéros inférieures ou égaux à 10 ?

$\boxed{A_{10}^{6} = \frac{10!}{4!} \text{ tirages possibles}}$

   (c) Combien y a t-il de tirages commençant par 1,2,3 dans cet ordre ?

- choix de 1, 2, 3 $\rightarrow$ 1 choix
- choix des 3 numéros suivants $\rightarrow A_{17}^{3} = \frac{17!}{14!}$

} Au total. $\boxed{\frac{17!}{14!} \text{ tels tirages}}$

   (d) Combien y a t-il de tirages commençant par 1,2,3 (dans un ordre quelconque) ?

- ~~choix de~~ l'ordre de 1, 2, 3 $\rightarrow 3!$
- choix des autres numéros : $\rightarrow A_{17}^{3} = \frac{17!}{14!}$

} total: $\boxed{\frac{3!\,17!}{14!} \text{ tels tirages}}$

   (e) Combien y a t-il de tirages pour lesquels les numéros sont dans l'ordre croissant ?

- on choisit les 6 numéros $\rightarrow \binom{20}{6}$ choix
- on les ordonne dans l'ordre $\nearrow$ $\rightarrow$ 1 choix

} total: $\boxed{\binom{20}{6} \text{ tels tirages}}$

2. Cette fois, on tire **simultanément** 6 jetons de cette urne.

   (a) Combien y a t-il de tirages possibles ?

Un tirage est une 6-combinaison d'éléments de $[\![1,20]\!]$: $\boxed{\binom{20}{6} \text{ tirages}}$

   (b) Combien y a t-il de tirages ne comportant que des numéros pairs ?

On se limite à l'ensemble à 10 éléments des n^{os} pairs : $\boxed{\binom{10}{6} \text{ tirages}}$

   (c) Combien y a t-il de tirages comportant exactement 2 numéros pairs et 4 impairs ?

- choix de 2 numéros pairs : $\binom{10}{2}$ choix
- choix de 4 numéros impairs $\binom{10}{4}$ choix

} total: $\boxed{\binom{10}{2} \times \binom{10}{4} \text{ tirages}}$

NOM - Prénom :

CORRECTION

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 7. SUJET B.

Vendredi 22 novembre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Soit la suite définie par :

$$u_0 = 2,\ u_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$$

Déterminer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4 - 4\times 2 = -4 < 0$ donc elle a deux racines complexes conjuguées : $1+i$ et $1-i$. Avec $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Il existe donc $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2}^n\left(A\cos\frac{n\pi}{4} + B\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

avec $\begin{cases} u_0 = 2 = A \\ u_1 = 1 = \sqrt{2}\left(A\frac{\sqrt{2}}{2} + B\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$ donc $\begin{cases} A = 2 \\ A+B = 1 \end{cases}$ donc $\begin{matrix} A = 2 \\ B = -1 \end{matrix}$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2}^n\left(2\cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}\right)}$

Exercice 2 Répondre aux questions suivantes. On donnera les réponses sous forme de coefficients binomiaux (ou produits de coefficients binomiaux) ou de factorielles (ou produits de factorielles). **On ne justifiera pas les réponses.**

1. Une urne contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. On tire **simultanément** 7 jetons de cette urne.
   (a) Combien y a t-il de tirages possibles ?

Un tirage est une 7-combinaison de l'ensemble $[\![1, 20]\!]$

Il y a donc $\boxed{\binom{20}{7} \text{ tirages possibles}}$

   (b) Combien y a t-il de tirages ne comportant que des numéros inférieurs ou égaux à 10 ?

$\boxed{\binom{10}{7}}$

   (c) Combien y a t-il de tirages comportant exactement 3 numéros pairs et 4 impairs ?

- choix de 3 numéros pairs : $\binom{10}{3}$
- choix de 4 numéros impairs : $\binom{10}{4}$

Au total : $\boxed{\binom{10}{3} \times \binom{10}{4} \text{ tels tirages}}$

2. Cette fois, on tire **successivement et sans remise** 7 jetons de cette urne.
   (a) Combien y a t-il de tirages possibles ?

Un tirage est une n-liste sans répétition de l'ensemble $[\![1, 20]\!]$

Il y a donc $A_{20}^{7} = \boxed{\frac{20!}{13!} \text{ tels tirages}}$

   (b) Combien y a t-il de tirages ne contenant que des numéros pairs ?

$A_{10}^{7} = \boxed{\frac{10!}{3!}}$

   (c) Combien y a t-il de tirages commençant par 1,2,3 dans cet ordre ?

$A_{17}^{4} = \boxed{\frac{17!}{13!}}$

   (d) Combien y a t-il de tirages commençant par 1,2,3 (dans un ordre quelconque) ?

- on choisit l'ordre des 3 premiers → 3! choix
- on complète → $A_{17}^{4} = \frac{17!}{13!}$ choix

total : $\boxed{\frac{17!}{13!} \times 3!}$

   (e) Combien y a t-il de tirages pour lesquels les numéros sont dans l'ordre décroissant ?

- on choisit les 7 numéros : $\binom{20}{7}$ choix
- on les range dans l'ordre croissant : 1 choix

total : $\boxed{\binom{20}{7}}$