NOM - Prénom : CORRECTION

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 8. SUJET A.

Vendredi 29 novembre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$: (E) : $y' - \frac{1}{2t}y = t$. On cherchera une solution particulière par la variation de la constante.

(E) est une EDL du 1er ordre sous forme résolue.

① Résolution de l'équation homogène (H): $y' - \frac{1}{2t}y = 0$

La fonction $t \mapsto -\frac{1}{2t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle y admet des primitives

$t \mapsto -\frac{1}{2}\ln t$ on est une.

Donc l'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \underbrace{\lambda e^{\frac{1}{2}\ln t}}_{\lambda\sqrt{t}} \end{array}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

② Recherche d'une solution particulière.

On cherche une solution de (E) sous la forme $f : t \mapsto \lambda(t)\sqrt{t}$

avec $\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) = \lambda'(t)\sqrt{t} + \dfrac{\lambda(t)}{2\sqrt{t}}$

Déterminons une CNS pour que f soit solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$:

f est solution de (E) $\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ \lambda'(t)\sqrt{t} + \dfrac{\lambda(t)}{2\sqrt{t}} - \dfrac{1}{2t}\lambda(t)\sqrt{t} = t$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ \lambda'(t)\sqrt{t} = t$ $\quad \big\downarrow \times \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \big\uparrow \times \sqrt{t}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ \lambda'(t) = \sqrt{t}$

Ainsi, il suffit que λ soit une primitive de $t \mapsto \sqrt{t}$ pour que f soit solution de (E). Donc on peut poser $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$ $\left(= \frac{2}{3}t\sqrt{t}\right)$

et $\boxed{f : t \mapsto \frac{2}{3}t^2 \text{ est solution de (E) sur } \mathbb{R}_+^*}$.

③ Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{2}{3}t^2 + \lambda\sqrt{t} \end{array}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 2

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$: (E) : $y'' + 4y = t^2$. On cherchera une solution particulière polynomiale de degré 2.
2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

① (E) est une EDL du second ordre à coefficients constants.

ⓐ éq° homogène : (H) : $y''+4y=0$, d'éq° caractéristique $r^2+4=0$
les racines de l'éq° caractéristique sont $2i$ et $-2i$

donc $\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto A\cos 2t + B\sin 2t \end{array}, \ (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\}}$

ⓑ recherche d'une solution particulière :
On cherche une solution de (E) sous la forme $f : t \mapsto at^2+bt+c$, avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$\forall t\in\mathbb{R}$, $f'(t) = 2at+b$, $f''(t) = 2a$.

f est sol° de (E) $\iff \forall t\in\mathbb{R},\ f''(t)+4f(t)=t^2$

$\iff \forall t\in\mathbb{R},\ 2a+4(at^2+bt+c)=t^2$

$\iff \forall t\in\mathbb{R},\ 4at^2+4bt+2a+4c=t^2$ ↓ identification

$\iff \begin{cases} 4a=1 \\ 4b=0 \\ 2a+4c=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=0 \\ c=-\frac{1}{8} \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{f : t \mapsto \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} \text{ est solution de } (E)}$

ⓒ L'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8} + A\cos 2t + B\sin 2t \end{array}, \ (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\}}$

② Soit f une solution de (E). Il existe donc $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tels que
$\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8} + A\cos 2t + B\sin 2t$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $f'(t) = \frac{t}{2} - 2A\sin 2t + 2B\cos 2t$

$\begin{cases} f(0)=1 \\ f'(0)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{8}+A=1 \\ 2B=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{9}{8} \\ B=0 \end{cases}$

Donc l'unique solution de (E) vérifiant ces conditions initiales est :

$$\boxed{f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{9}{8}\cos 2t \end{array}}$$

NOM - Prénom : CORRECTION

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 8. SUJET B.

Vendredi 30 novembre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Exercice 1
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$: (E) : $y' + \frac{1}{2t}y = t$. On cherchera une solution particulière par la variation de la constante.

voir rédaction Sujet A.

(1) $$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \underbrace{\lambda e^{-\frac{1}{2}\ln t}}_{\frac{\lambda}{\sqrt{t}}} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(2) $$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{2}{5}t^2 \end{array}$$ est solution de (E)

(3) L'ensemble des solutions de (E) est,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{2}{5}t^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{t}} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 2

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$: (E) : $y'' + 9y = t^2$. On cherchera une solution particulière polynomiale de degré 2.
2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Voir rédaction du sujet A.

1) a) eq° homogène : $y'' + 9y = 0$, d'eq° caractéristique $r^2 + 9 = 0$

racines $3i$ et $-3i$

donc $\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto A\cos 3t + B\sin 3t \end{array}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

b) solution particulière : $f : t \mapsto \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{81}$

c) Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est :

$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{81} + A\cos 3t + B\sin 3t \end{array}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

2) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{81} + \frac{83}{81}\cos(3t) \end{array}$ est l'unique solution

de (E) qui vérifie les conditions initiales