

PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 12.

Semaine du lundi 16 décembre au vendredi 20 décembre 2024.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de cours de la semaine précédente.
2. Rang d'une matrice : définition. Calcul pratique du rang par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice. Lien entre le rang d'une matrice et son inversibilité (proposition sans démonstration). Exemple : la matrice est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Définition de vecteurs colinéaires (dans \mathbb{R}^2). Critère de colinéarité pour 2 vecteurs de \mathbb{R}^2 (avec le déterminant). Application : déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ ($(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$)
4. Méthode pour déterminer un système d'équations paramétriques d'une droite du plan.
Exemple : déterminer un système d'équations paramétriques de la droite passant par $A(1, -3)$ et $B(2, 1)$.
5. Intersection de deux droites du plan (proposition sans démonstration). Illustrer par un dessin.
Exemple : déterminer l'intersection des droites $\mathcal{D} : 2x - y + 1 = 0$ et $\mathcal{D}' : -x + y + 3 = 0$ et tracer ces deux droites dans le plan.
6. Dans le plan, à partir d'une équation cartésienne d'une droite (donnée par l'examinateur), savoir donner un vecteur directeur, un vecteur normal et savoir tracer la droite (en préparation à cette question, on pourra s'entraîner sur les équations $2x + y + 1 = 0$, $x = y$, $x = 3$, $2y = 1$).
7. Dans le plan, définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
Exemple : soit $\mathcal{D} : x + 2y - 1 = 0$ et $M(2, 1)$. Déterminer le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} .
8. Dans le plan : équation d'un cercle donné par son centre et son rayon.
Exemple : les équations cartésiennes suivantes sont-elles des équations de cercles ? Si oui, préciser le centre et le rayon.
a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x + 5 = 0$

Thème de la colle :

Pas d'exo-chrono cette semaine (cadeau de Noël)

MATRICES

Définitions et opérations sur les matrices

Matrice de taille (n, p) . Égalité de deux matrices. Addition. Multiplication par un scalaire. Produit matriciel. Propriétés. Transposition.

Matrices carrées

Définition. Propriétés du produit de $M_n(\mathbb{K})$. Matrice identité. Puissance n^{ieme} d'une matrice carrée. Formule du binôme, pour deux matrices qui commutent. Matrices inversibles : définition, exemples. Inverse d'une transposée, d'un produit, d'une puissance, de matrices inversibles. Cas particulier d'une matrice 2×2 . Méthode pour déterminer si une matrice est inversible et, si c'est le cas, pour en déterminer l'inverse (avec un système linéaire).

Quelques matrices carrées particulières

Matrices symétriques, antisymétriques. Matrices scalaires. Matrices diagonales. Matrices triangulaires supérieures et inférieures (pour ces matrices : propriétés du produit, de la somme, conditions d'inversibilité).

Rang d'une matrice

Le rang de A est le rang de tout système $AX = B$ (on précise que le rang ne dépend pas du second membre

B). Rang d'une matrice par opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible si, et seulement si, $\text{rg}(A) = n$.

GÉOMÉTRIE

Géométrie du plan affine

Le plan affine. Vecteurs colinéaires. Déterminant de deux vecteurs de \mathbb{R}^2 . Critère de colinéarité. Équation cartésienne d'une droite du plan. Système d'équations paramétriques d'une droite du plan. Droites parallèles. Intersection de deux droites.

Géométrie du plan affine euclidien

Produit scalaire. Vecteurs orthogonaux. Norme euclidienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalité triangulaire. Théorème de Pythagore. Base et repère orthonormés. Orthogonalité. Vecteur normal à une droite. Droites orthogonales. Projeté orthogonal d'un point sur une droite. Équation cartésienne d'un cercle défini par son centre et son rayon.