PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 13.

Semaine du lundi 6 janvier au vendredi 10 janvier 2025.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de cours de la semaine 12.
2. Dans l'espace, définition du projeté orthogonal d'un point sur un plan. Exemple : déterminer le projeté orthogonal de $A(0, 1, -2)$ sur le plan $\mathcal{P} : x + y + z - 1 = 0$.
3. Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ définis par $\mathcal{P} : x - 2y + z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : 2x + y - z - 3 = 0$. Si c'est une droite, en donner un système d'équations paramétriques. En déduire un point de la droite et un vecteur directeur.
4. Démonstration des identités suivantes, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{K}$:
$$X^n - 1 = (X - 1)(1 + X + \dots + X^{n-1}) \text{ et } X^n - a^n = (X - a) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} X^k \right).$$
5. Montrer que $(X - a) \mid P \iff P(a) = 0$.
6. Généralisation du résultat précédent (énoncé pour p racines deux à deux distinctes), sans démonstration. Application : factoriser $P = 2X^2 - 3X + 1$.
7. Montrer - en citant précisément le résultat utilisé - que si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels qu'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts tels que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_i) = Q(a_i)$, alors $P = Q$.
8. Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
Exemple : $P = (X + 2)(X - 3)^2(X + 1)^5$.

Thème de la colle :

CALCULS

Poser un exercice de la liste «EXOS-CHRONOS 5». L'exercice doit être fait en moins de 4 minutes.

GÉOMÉTRIE

Géométrie du plan

Voir semaine 12.

Géométrie de l'espace affine

L'espace affine. Vecteurs colinéaires. vecteurs et points coplanaires. Système d'équations paramétriques d'une droite. Système d'équations paramétriques d'un plan.

Géométrie de l'espace affine euclidien

Produit scalaire. Vecteurs orthogonaux. Norme euclidienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalité triangulaire. Théorème de Pythagore. Base et repère orthonormés. Équation cartésienne d'un plan de l'espace. Vecteur normal d'un plan. Plans orthogonaux. Distance d'un point à un plan. Intersection de deux plans. Système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace.

POLYNÔMES

Ensemble des polynômes

Définitions. Notation $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$. Si $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = Q(x)$, alors P et Q ont les mêmes coefficients. Opérations dans $\mathbb{K}[X]$: combinaison linéaire, produit, composition, dérivation.

Racines d'un polynôme, divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$.

Divisibilité : définition. $(X - a)$ divise P si, et seulement si, $P(a) = 0$. Généralisation de ce résultat à p racines deux à deux distinctes. Corollaire : un polynôme non-nul de degré $\leq n$ possède au plus n racines. Racines multiples : ordre de multiplicité d'une racine. Soit a une racine de P , a est racine multiple de P si, et seulement si, $P'(a) = 0$.