CORRECTION

BCPST 12

NOM - Prénom :

Interrogation écrite n°9.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 9. SUJET A.

Jeudi 19 décembre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Exercice 1
La matrice suivante est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ fixé quelconque.
Étudions le système suivant, d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(S) : AX = B$$

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + 4y - z = a \\ x + 2y - z = b \\ -2x - 5y + 3z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z = b \\ 2x + 4y - z = a \\ -2x - 5y + 3z = c \end{cases} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z = b \\ z = a - 2b \\ -y + z = c + 2b \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix}$$

Le système est échelonné de rang 3 : il est de Cramer, donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$

On termine la résolution pour trouver A^{-1}

$$(S) \iff \begin{cases} x = b - 2a + 8b + 2c + a - 2b = -a + 7b + 2c \\ y = a - 2b - c - 2b = a - 4b - c \\ z = a - 2b \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible, d'inverse $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$

Exercice 2

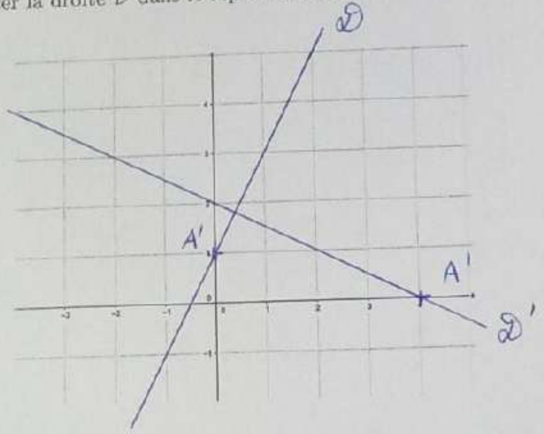
Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $2x - y + 1 = 0$.

1. Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

$A'(0,1)$ est un point de $\mathcal{D}$ (car $2\times0 - 1 + 1 = 0$)

2. Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans le repère ci-dessous :



3. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}'$, perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par $A(4,0)$ et la tracer (ci-dessus).

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}'$ donc $\mathcal{D}'$ a une équation de la forme : $x + 2y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$ à déterminer.

$A(4,0) \in \mathcal{D}'$ donc $4 + 2\times0 + c = 0$, donc $c = -4$

donc $x + 2y - 4 = 0$ est une équation de $\mathcal{D}'$

NOM - Prénom : CORRECTION

BCPST 12
Interrogation écrite n°9.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 9. SUJET B.

Jeudi 19 décembre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Exercice 1
La matrice suivante est-elle inversible? Si oui, déterminer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ fixé quelconque.
Étudions le système suivant, d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(S) : AX = B$$

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y + z = b & L1 \leftrightarrow L2 \\ -2x + 2y + 3z = a \\ y + z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + z = b \\ 6y + 5z = a + 2b & L2 \leftarrow L2 + 2L1 \\ y + z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + z = b \\ y + z = c \\ 6y + 5z = a + 2b & L2 \leftrightarrow L3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + z = b \\ y + z = c \\ -z = a + 2b - 6c & L3 \leftarrow L3 - 6L2 \end{cases}$$

Ce système est de rang 3, il est de Cramer donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$

On termine la résolution pour déterminer A^{-1}.

$$(S) \iff \begin{cases} x = b - 2a - 4b + 10c + a + 2b - 6c = -a - b + 4c \\ y = c + a + 2b - 6c = a + 2b - 5c \\ z = -a - 2b + 6c \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible, d'inverse $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}}$

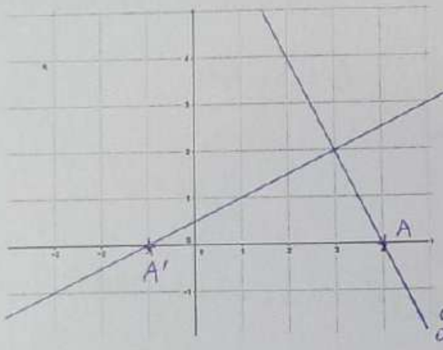
Exercice 2 Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x - 2y + 1 = 0$.

1. Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

$A'(-1,0)$ est un point de $\mathcal{D}$ (car $-1 - 2\times 0 + 1 = 0$)

2. Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans le repère ci-dessous :



3. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}'$, perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par $A(4,0)$ et la tracer (ci-dessus).

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}'$ donc $\mathcal{D}'$ a une équation de la forme : $2x + y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$ à déterminer.

$A(4,0) \in \mathcal{D}'$ donc $2\times 4 + 0 + c = 0$, donc $c = -8$

donc $2x + y - 8 = 0$ est une équation de $\mathcal{D}'$