Programme de colle de la semaine 14.

Semaine du lundi 13 janvier au vendredi 17 janvier 2025.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de cours de la semaine 13.
2. **Facultatif :** Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que si (u_n) converge, alors sa limite est unique.
3. Montrer, en citant précisément une proposition du cours, que la suite $((-1)^n)$ n'est pas convergente.
4. Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes. On soignera la rédaction.
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^3+2n-1}{2n^3+5n+2}$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = n^2 - \ln(n^{10})$.
5. Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes. On soignera la rédaction.
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{e^{-n}}{n^4+2}$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = n+2+\dfrac{(-1)^n}{n}$.
6. Énoncer (sans démonstration) la proposition de passage à la limite dans une inégalité. Montrer par un exemple qu'on ne peut pas remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes.
7. Théorème d'existence de limite par encadrement ("théorème des gendarmes") : énoncé sans démonstration. Exemple : déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
8. Extension du résultat précédent aux limites infinies : théorème de comparaison. Énoncé sans démonstration. Exemple : déterminer la limite de la suite $\left(\sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Thème de la colle :

CALCULS
Poser un exercice de la liste «EXOS-CHRONOS V». L'exercice doit être fait en moins de 3 minutes.

POLYNÔMES
Tout le cours (voir programme de colle de la semaine précédente)

SUITES RÉELLES
Définitions
Définitions et notations. Propriété vraie à partir d'un certain rang. Suites majorées, minorées, bornées.
Convergence, divergence
Suite convergente : définition. Exemple. Unicité de la limite. Limites infinies : définition. Exemple. Résultats généraux : (u_n) a pour limite ℓ ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont pour limite ℓ. Application : $((-1)^n)$ n'a pas de limite. Le produit d'une suite bornée et d'une suite que tend vers 0 est une suite qui tend vers 0. Toute suite convergente est bornée. Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ apcr.
Opérations sur les limites
Somme, produit, quotient.
Limites et inégalités
Passage à la limite dans une inégalité. Théorème de limite par encadrement. Extension aux limites infinies (comparaison).
Le théorème de composition des limites peut être utilisé en exercice.