

PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 15.

Semaine du lundi 20 janvier au vendredi 24 janvier 2025.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de cours de la semaine 14.
2. Théorème de la limite monotone. Énoncé (sans démonstration), exemple : montrer que la suite définie par :
 $u_0 = a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-2u_n}$ est convergente.
3. Théorème de la limite monotone (énoncé). Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
4. Suites adjacentes : définition. Proposition : convergence des suites adjacentes (sans démonstration).
Exemple : on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $S'_n = S_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ montrer que (S_n) et (S'_n) sont adjacentes. En déduire leur convergence.
5. Théorème du point fixe (Comment trouver la limite d'une suite récurrente $(u_{n+1} = f(u_n))$ qui converge). Donner l'énoncé précis (ne pas oublier la continuité de f) sans démonstration. Exemple : en admettant que la suite définie par :
 $u_0 = a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-2u_n}$ est décroissante minorée, montrer qu'elle converge vers 0.
6. Soit $u_0 = \frac{3}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Expliquer (sur un dessin) comment on construit les premiers termes à partir du graphe de f .

Thème de la colle :

CALCULS : Exos-chronos 6

SUITES RÉELLES

Définitions

Définitions et notations. Propriété vraie à partir d'un certain rang. Suites majorées, minorées, bornées.

Convergence, divergence

Suite convergente : définition. Exemple. Unicité de la limite. Limites infinies : définition. Exemple. Résultats généraux : (u_n) a pour limite ℓ ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont pour limite ℓ . Application : $((-1)^n)$ n'a pas de limite. Le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0 est une suite qui tend vers 0. Toute suite convergente est bornée. Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ apcr.

Opérations sur les limites

Somme, produit, quotient.

Limites et inégalités

Passage à la limite dans une inégalité. Théorème de limite par encadrement. Extension aux limites infinies (comparaison).

Le théorème de composition des limites peut être aussi utilisé en exercice.

Borne supérieure, borne inférieure

Majorant, minorant. Plus grand élément, plus petit élément. Borne supérieure, borne inférieure.

Suites monotones.

Définition. Théorème de la limite monotone. Exemples. Suites adjacentes. Exemples.

Exemples d'étude de suites récurrentes " $u_{n+1} = f(u_n)$ "