NOM - Prénom :

BCPST 12
Interrogation écrite $n^o 12$.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 12. SUJET A.

Vendredi 31 janvier 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1
Déterminer un équivalent de $u_n = \ln(n^3 + 1) - 2n$. Justifier.

apcr, $u_n = \ln\left[n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right] - 2n = \ln(n^3) + \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) - 2n$

$= 3\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) - 2n$

$= -2n\left[1 - \frac{3}{2}\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{2n}\right]$

$\frac{\ln n}{n} \to 0$ par CC

$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{2n} \to 0$ par quotient des limites

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{2n}\right] = 1$

donc $u_n \sim -2n$

Exercice 2

Déterminer, sans justifier, un équivalent le plus simple possible des suites :

1. $\ln(n) - n \sim$ $-n$

2. $e^{2n} - 3n \sim$ e^{2n}

3. $2n + 7n^3 \sim$ $7n^3$

4. $e^{2n} - 1 \sim$ e^{2n}

5. $3^n + 2^n \sim$ 3^n

6. $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sim$ $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

7. $\ln(3n^2) \sim$ $2\ln n$

8. $\dfrac{2}{n^3} - \dfrac{3}{n^2} \sim$ $-\dfrac{3}{n^2}$

9. $\dfrac{3n^5 + 10n + \sqrt{7}}{2n^3 + 8n^2 + 1} \sim$ $\dfrac{3}{2}n^2$

10. $\ln\left(\dfrac{n+1}{n+3}\right) \sim$ $-\dfrac{2}{n}$

11. $2\ln(n) - n^2e^{-n} \sim$ $2\ln n$

12. $n^2\ln(n+1) \sim$ $n^2\ln n$

NOM - Prénom : **BCPST 12**

Interrogation écrite $n^o 12$.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 12. SUJET B.

Vendredi 31 janvier 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1
Déterminer un équivalent de $u_n = \ln(n^2+1) - 3n$. Justifier.

apcr, $u_n = \ln\left[n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right] - 3n = \ln(n^2) + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 3n$

$= 2\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 3n$

$= -3n\left[1 - \frac{2}{3}\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{3n}\right]$

$\to 0$ parce

$\to 0$ par quotient des limites

$\lim_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{2}{3}\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{3n}\right] = 1$

donc $u_n \sim -3n$

Exercice 2

Déterminer, sans justifier, un équivalent le plus simple possible des suites :

1. $\ln(3n^2) \sim$ $2\ln n$
2. $\dfrac{2}{n^3} - \dfrac{3}{n^2} \sim$ $-\dfrac{3}{n^2}$
3. $\ln(n) - n \sim$ $-n$
4. $e^{2n} - 3n \sim$ e^{2n}
5. $2n + 7n^3 \sim$ $7n^3$
6. $e^{2n} - 1 \sim$ e^{2n}
7. $3^n + 2^n \sim$ 3^n
8. $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sim$ $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
9. $\dfrac{3n^5 + 10n + \sqrt{3}}{2n^3 + 8n^2 + 1} \sim$ $\dfrac{3}{2}n^2$
10. $\ln\left(\dfrac{n+1}{n+3}\right) \sim$ $-\dfrac{2}{n}$ (*)
11. $3\ln(n) - n^2e^{-n} \sim$ $3\ln n$
12. $n^3\ln(n+1) \sim$ $n^3\ln n$

(*) $\left.\begin{array}{l}\ln\left(\dfrac{n+1}{n+3}\right) = \ln\left(\dfrac{n+3-2}{n+3}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{2}{n+3}\right) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n+3} = 0\end{array}\right\}$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{2}{n+3}\right) \sim -\dfrac{2}{n+3}$

puis $n+3 \sim n$ donc par quotient des équivalents, $\dfrac{-2}{n+3} \sim \dfrac{-2}{n}$

Ainsi, $\ln\left(1 - \dfrac{2}{n+3}\right) \sim -\dfrac{2}{n}$