Correction Exos-chronos 8

Ex1 : voir cours

Ex2 :

Par opérations usuelles sur les développements limités, on trouve $\boxed{\sqrt{1+2x} - \cos(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}$.

Donc $\sqrt{1+2x} - \cos(x) - x \underset{0}{=} \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. Ce développement limité est non-nul, on en déduit un équivalent : $\sqrt{1+2x} - \cos(x) - x \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{2}$. Donc, par quotient des équivalents, $\frac{\sqrt{1+2x} - \cos(x) - x}{x^3} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$. On en déduit $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \cos(x) - x}{x^3} = \frac{1}{2}}$.

Ex3 :

Calculer la limite quand x tend vers 0 des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{e^{2x} - \sin(2x) - 1}{\ln(1+x) - x}$

- $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\ln(1+x) - x \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $\boxed{\ln(1+x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}}$
- on effectue un $DL_2(0)$ du numérateur : $\begin{cases} e^{2x} \underset{0}{=} 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) \\ \sin(2x) \underset{0}{=} 2x + o(x^2) \end{cases}$

donc $e^{2x} - \sin(2x) - 1 \underset{0}{=} 2x^2 + o(x^2)$

donc $\boxed{e^{2x} - \sin(2x) - 1 \underset{0}{\sim} 2x^2}$

- Par quotient des équivalents, $f(x) \underset{0}{\sim} -4$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -4}$

Ex4 :

2. $g : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \cos(\frac{x}{2}) - \sin(\frac{x}{2})}{x^3}$

- On effectue un $DL_3(0)$ du numérateur :

$$\begin{cases} \sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{8} + o(x^3) \\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3) \end{cases}$$

donc (par CL des DL) : $\sqrt{1+x} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{=} \underbrace{\frac{4}{48}}_{\frac{1}{12}} x^3 + o(x^3)$

donc $\boxed{\sqrt{1+x} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{12}x^3}$

- Par quotient des équivalents, $g(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{12}$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{12}}$