CORRECTION

NOM : **BCPST 12**

Interrogation écrite $n^o 16$.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 16. SUJET A.

Vendredi 31 mars 2023.
L'usage de la calculatrice est autorisé

Exercice 1

En France, lors d'un pic d'épidémie de Covid-19, on estime que 250 personnes sur 100 000 sont atteintes de la maladie.
Le test de dépistage PCR est assez fiable puisqu'il permet de détecter 98 pour cent des personnes atteintes (les 2 pour cent restants sont appelés "faux négatifs"). De plus, il désigne à tort comme malades 3 pour cent des personnes non-atteinte ("faux positifs").

1. On choisit une personne au hasard dans la population française et on lui fait subir un test PCR. Déterminer la probabilité que cette personne ait un résultat positif au test.
2. Le test est positif. Déterminer la probabilité que la personne soit malade.

① On définit les évènements : A = " la personne choisie est malade ",
B = " la personne choisie est positive au test "

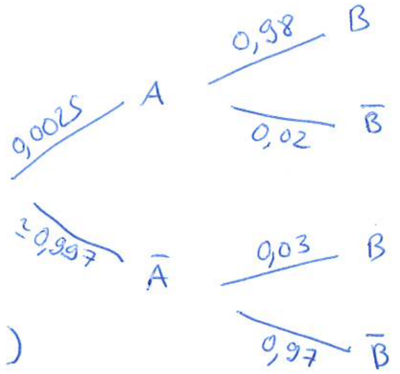
Traduisons l'énoncé : $P(A) = \frac{250}{100\,000}$, $P_A(B) = 0{,}98$, $P_{\bar{A}}(B) = 0{,}03$

Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet $(A, \bar{A})$ vérifiant $P(A) \neq 0$, $P(\bar{A}) \neq 0$:

$$P(B) = P(A)\,P_A(B) + P(\bar{A})\,P_{\bar{A}}(B)$$

$$= \underbrace{\frac{250}{100\,000}}_{\simeq 0{,}0025} \times \underbrace{0{,}98}_{\simeq 1} + \underbrace{\left(1 - \frac{250}{100\,000}\right)}_{\simeq 1} \times 0{,}03$$

$$\simeq 0{,}03$$



donc $\boxed{P(B) \simeq 0{,}03}$ (valeur exacte : 0,032375)

② On cherche $P_B(A)$. Nous allons appliquer la formule de Bayes, ce qui est possible car $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P_A(B)}{P(B)} = \frac{0{,}0025 \times 0{,}98}{0{,}0025 \times 0{,}98 + \underbrace{(1 - 0{,}0025)}_{0{,}9975} \times 0{,}03}$$

D'où $\boxed{P_B(A) \simeq 0{,}08}$ (valeur exacte : 0,0756 ....)

Exercice 2

Nouvelle arrivée dans une mare, une grenouille se régale de petits invertébrés. Chaque jour, son menu est constitué soit d'insectes, soit d'une limace (assez grosse pour la rassasier pour la journée). Le premier jour ("jour 1"), elle attrape une limace avec probabilité 1/2. Puis :

- si un jour elle mange une limace, le jour suivant, elle remange une limace avec probabilité 1/5.
- si un jour elle mange des insectes, le jour suivant elle mange une limace avec probabilité 1/2.

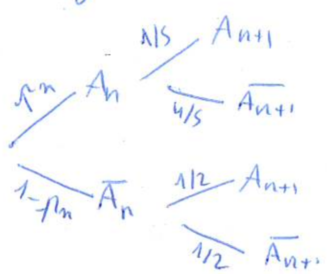
On note A_n l'évènement "La grenouille mange une limace le jour n".

1. Déterminer $P(A_1)$, $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$ et $P(\overline{A_n})$.
3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(A_n)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{3}{10}p_n + \frac{1}{2}$.
4. En déduire p_n en fonction de n.

(1) $\boxed{P(A_1) = \frac{1}{2}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{5}}$ et $\boxed{P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}}$ } d'après l'énoncé

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet $(A_n, \overline{A_n})$, vérifiant $P(A_n) \neq 0$, $P(\overline{A_n}) \neq 0$ (il est possible que la grenouille mange une limace le $n^{\text{ième}}$ jour, il est possible qu'elle mange des insectes le $n^{\text{ième}}$ jour)



$$P(A_{n+1}) = P(A_n)\, P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})\, P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$

donc $\boxed{P(A_{n+1}) = \frac{1}{5}P(A_n) + \frac{1}{2}P(\overline{A_n})}$

(3) d'après la formule précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{2}(1-p_n)$ (puisque $P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n)$). Donc $\boxed{p_{n+1}} = \underbrace{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)}_{-\frac{3}{10}} p_n + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{3}{10}p_n + \frac{1}{2}}$

(4) $(p_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmético géométrique. On cherche $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = -\frac{3}{10}\ell + \frac{1}{2}$

$\ell = -\frac{3}{10}\ell + \frac{1}{2} \iff \left(1 + \frac{3}{10}\right)\ell = \frac{1}{2} \iff \frac{13}{10}\ell = \frac{1}{2} \iff \boxed{\ell = \frac{5}{13}}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} p_{n+1} = -\frac{3}{10}p_n + \frac{1}{2} \\ \frac{5}{13} = -\frac{3}{10}\left(\frac{5}{13}\right) + \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\left(p_{n+1} - \frac{5}{13}\right) = -\frac{3}{10}\left(p_n - \frac{5}{13}\right)$. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$q_n = p_n - \frac{5}{13}$. $(q_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = q_1\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

avec $q_1 = p_1 - \frac{5}{13} = \frac{1}{2} - \frac{5}{13} = \frac{13-10}{26} = \frac{3}{26}$. Donc $q_n = \frac{3}{26}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{5}{13} + \frac{3}{26}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}}$$

NOM : CORRECTION **BCPST 12**

Interrogation écrite $n^o 16$.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 16. SUJET B.

Vendredi 31 mars 2023.
L'usage de la calculatrice est autorisé

Exercice 1

Nouvelle arrivée dans une mare, une grenouille se régale de petits invertébrés. Chaque jour, son menu est constitué soit d'insectes, soit d'une limace (assez grosse pour la rassasier pour la journée). Le premier jour ("jour 1"), elle attrape une limace avec probabilité 1/2. Puis :
- si un jour elle mange une limace, le jour suivant, elle remange une limace avec probabilité 1/4.
- si un jour elle mange des insectes, le jour suivant elle mange une limace avec probabilité 2/3.

On note A_n l'évènement "La grenouille mange une limace le jour n".

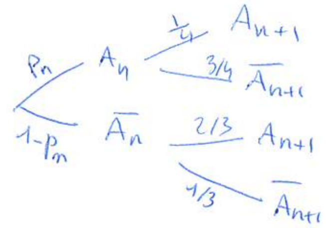
1. Déterminer $P(A_1)$, $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$ et $P(\overline{A_n})$.
3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(A_n)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = -\frac{5}{12}p_n + \frac{2}{3}$.
4. En déduire p_n en fonction de n.

① $\boxed{P(A_1) = \frac{1}{2}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}}$, $\boxed{P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{2}{3}}$

② Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet $(A_n, \overline{A_n})$ vérifiant $P(A_n) \neq 0$, $P(\overline{A_n}) \neq 0$

$P(A_{n+1}) = P(A_n) P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$

donc $\boxed{P(A_{n+1}) = \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{2}{3} P(\overline{A_n})}$



③ Puisque $P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n)$, on en déduit :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = \frac{1}{4} p_n + \frac{2}{3}(1 - p_n) = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) p_n + \frac{2}{3}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{p_{n+1} = -\frac{5}{12} p_n + \frac{2}{3}}$

④ $(p_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithméticogéométrique. On cherche $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = -\frac{5}{12}\ell + \frac{2}{3}$

$\ell = -\frac{5}{12}\ell + \frac{2}{3} \iff \left(1 + \frac{5}{12}\right)\ell = \frac{2}{3} \iff \frac{17}{12}\ell = \frac{2}{3} \iff \boxed{\ell = \frac{8}{17}}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} p_{n+1} = -\frac{5}{12} p_n + \frac{2}{3} \\ \frac{8}{17} = -\frac{5}{12}\left(\frac{8}{17}\right) + \frac{2}{3} \end{cases}$ donc $p_{n+1} - \frac{8}{17} = -\frac{5}{12}\left(p_n - \frac{8}{17}\right)$. On pose,

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = p_n - \frac{8}{17}$. La suite $(q_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{5}{12}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = q_1 \left(-\frac{5}{12}\right)^{n-1}$ avec $q_1 = p_1 - \frac{8}{17} = \frac{1}{2} - \frac{8}{17} = \frac{1}{34}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = \frac{1}{34}\left(-\frac{5}{12}\right)^{n-1}$ et : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{8}{17} + \frac{1}{34}\left(-\frac{5}{12}\right)^{n-1}}$