CORRECTION

NOM : **BCPST 12**

Interrogation écrite $n^o 14$.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 14. SUJET A.

Vendredi 14 février 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Calculer la limite quand x tend vers 0 des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x} - \sin(2x) - 1}{\ln(1+x) - x}$

* $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\ln(1+x) - x \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $\boxed{\ln(1+x) - x \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}}$

* on effectue un $DL_2(0)$ du numérateur : $\begin{cases} e^{2x} \underset{0}{=} 1 + 2x + \dfrac{(2x)^2}{2} + o(x^2) \\ \sin(2x) \underset{0}{=} 2x + o(x^2) \end{cases}$

donc $e^{2x} - \sin(2x) - 1 \underset{0}{=} 2x^2 + o(x^2)$

donc $\boxed{e^{2x} - \sin(2x) - 1 \underset{0}{\sim} 2x^2}$

* Par quotient des équivalents, $f(x) \underset{0}{\sim} -4$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -4}$

2. $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - \cos(\frac{x}{2}) - \sin(\frac{x}{2})}{x^3}$

* On effectue un $DL_3(0)$ du numérateur :

$$\begin{cases} \sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{8} + o(x^3) \\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3) \end{cases}$$

donc (par CL. des DL) : $\sqrt{1+x} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{=} \underbrace{\frac{4}{48}}_{\frac{1}{12}} x^3 + o(x^3)$

donc $\boxed{\sqrt{1+x} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{12}x^3}$

* Par quotient des équivalents, $g(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{12}$

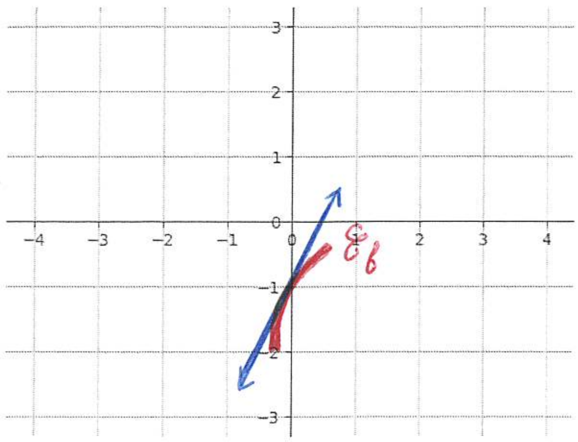
Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \frac{1}{12}}$

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On suppose que f admet un développement limité en 0 qui est : $f(x) \underset{0}{=} -1 + 2x - \dfrac{x^2}{2} + 2x^3 + o(x^3)$.

1. Déterminer (sans justifier) l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
2. Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
3. Dessiner l'allure de la courbe au voisinage du point d'abscisse 0.

① Eq° de la tangente en $x=0$: $\boxed{y = -1 + 2x}$



② $f(x) - (-1+2x) \underset{0}{=} \underbrace{-\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}_{\text{DL non-nul}}$

donc $f(x) - (-1+2x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$

Or $-\dfrac{x^2}{2} \leq 0$ au $V(0)$, donc $f(x) - (-1+2x) \leq 0$ au $V(0)$

donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

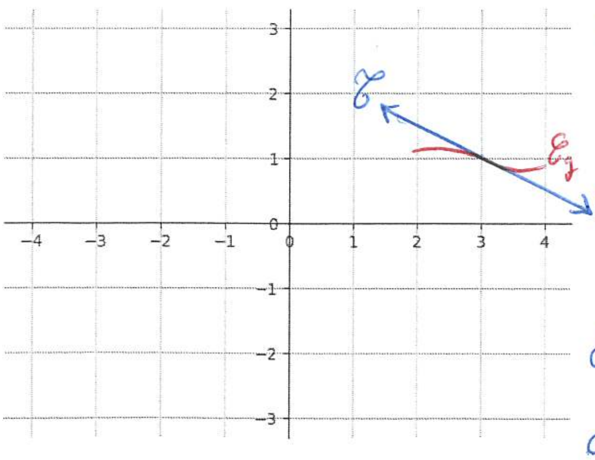
Exercice 3

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On suppose que g admet un développement limité en 3 qui est : $g(3+h) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{h}{2} + \dfrac{h^3}{3} - \dfrac{h^4}{4} + o(h^4)$.

1. Déterminer (sans justifier) l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse ~~2~~ 3
2. Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente au voisinage de ~~2~~ 3
3. Dessiner l'allure de la courbe au voisinage du point d'abscisse ~~2~~ 3

① On pose $x = 3 + h$

$g(x) \underset{3}{=} 1 - \dfrac{(x-3)}{2} + \dfrac{(x-3)^3}{3} + o((x-3)^3)$



Eq° de la tangente en $x=3$: $\boxed{\mathcal{T} : y = 1 - \frac{1}{2}(x-3)}$

② $g(x) - \left[1 - \frac{1}{2}(x-3)\right] \underset{3}{=} \underbrace{\frac{1}{3}(x-3)^3 + o((x-3)^3)}_{\text{DL non-nul}}$

donc $g(x) - \left[1 - \frac{1}{2}(x-3)\right] \underset{3}{\sim} \frac{1}{3}(x-3)^3$

au $V(3)$: si $x > 3$, $\frac{1}{3}(x-3)^3 > 0$

donc $g(x) - \left[1 - \frac{1}{2}(x-3)\right] > 0$

donc $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{T}$

si $x < 3$, $\frac{1}{3}(x-3)^3 < 0$

donc $g(x) - \left[1 - \frac{1}{2}(x-3)\right] < 0$

donc $\mathcal{C}_g$ est en-dessous de $\mathcal{T}$.

CORRECTION

NOM :

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 14. SUJET B.

Vendredi 14 février 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Calculer la limite quand x tend vers 0 des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x) - e^{2x} + 2x}{\ln(1+2x) - 2x}$

$\left\{\begin{array}{l} \ln(1+y) \underset{0}{=} y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \\ \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0 \end{array}\right\}$ donc par substitution $\ln(1+2x) \underset{0}{=} 2x - 2x^2 + \underbrace{o((2x)^2)}_{o(4x^2)}$ c'est $o(x^2)$

donc $\ln(1+2x) - 2x \underset{0}{=} -2x^2 + o(x^2)$, donc $\ln(1+2x) - 2x \underset{0}{\sim} -2x^2$

on effectue un $DL_2(0)$ du numérateur : $\left\{\begin{array}{l} \cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ e^{2x} \underset{0}{=} 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) \end{array}\right.$

donc $\cos(x) - e^{2x} + 2x \underset{0}{=} -\frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$

donc $\cos(x) - e^{2x} + 2x \underset{0}{\sim} -\frac{5}{2}x^2$

Par quotient des équivalents, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{5}{4}$ - Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{5}{4}$

2. $g : x \mapsto \dfrac{\cos(\frac{x}{2}) - \sin(\frac{x}{2}) - \sqrt{1+x}}{x^3}$

On effectue un $DL_3(0)$ du numérateur :

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{8} + o(x^3) \\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3) \\ \sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \end{array}\right.$$

Donc (par CL des DL) : $\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{1+x} \underset{0}{=} -x - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$

Donc $\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} -x$

Par quotient des équivalents, $g(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{x^2}$, Or $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$

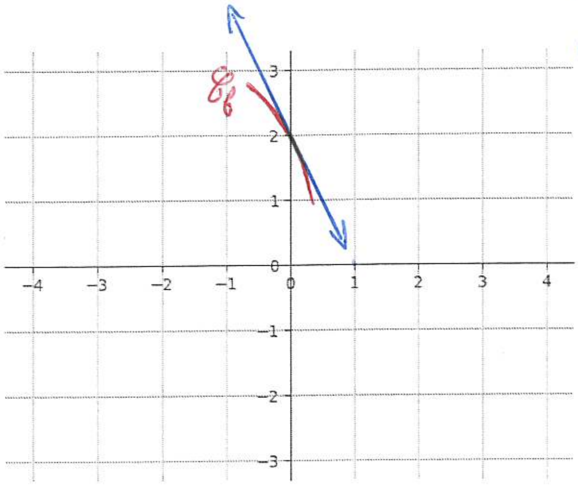
Donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On suppose que f admet un développement limité en 0 qui est : $f(x) \underset{0}{=} 2 - 2x - \dfrac{x^2}{2} - 2x^3 + o(x^3)$.

1. Déterminer (sans justifier) l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
2. Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
3. Dessiner l'allure de la courbe au voisinage du point d'abscisse 0.

① Eq° de la tangente en $x=0$ $\boxed{y = 2-2x}$



② $f(x) - (2-2x) \underset{0}{=} \underbrace{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{\text{DL non-nul}}$

donc $f(x) - (2-2x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

Or $-\frac{x^2}{2} \leq 0$ au $V(0)$, donc $f(x) - (2-2x) \leq 0$ au $V(0)$

Donc $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de sa tangente au voisinage de 0

Exercice 3

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On suppose que g admet un développement limité en 2 qui est : $g(2+h) \underset{0}{=} -1 + \dfrac{h}{2} - \dfrac{h^3}{3} + \dfrac{h^4}{4} + o(h^4)$.

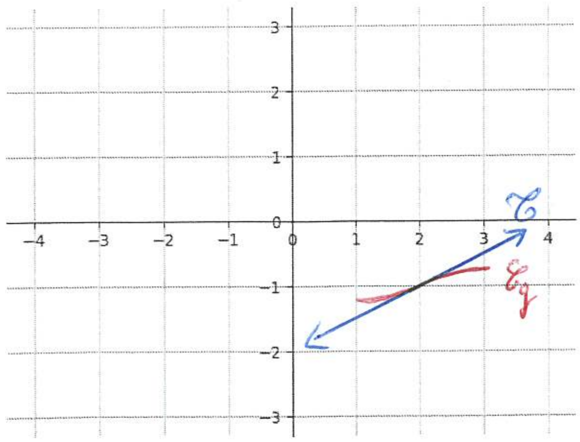
1. Déterminer (sans justifier) l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.
2. Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente au voisinage de 2.
3. Dessiner l'allure de la courbe au voisinage du point d'abscisse 2.

① On pose $x = 2+h$

$g(x) \underset{2}{=} -1 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{3}(x-2)^3 + o((x-2)^3)$

Équation de la tangente en $x=2$:

$\boxed{\mathcal{T} : y = -1 + \frac{1}{2}(x-2)}$



② $g(x) - [-1 + \frac{1}{2}(x-2)] \underset{2}{=} \underbrace{-\frac{1}{3}(x-2)^3 + o(x-2)^3}_{\text{DL non-nul}}$

donc $g(x) - [-1 + \frac{1}{2}(x-2)] \underset{2}{\sim} -\frac{1}{3}(x-2)^3$

au $V(2)$: si $x > 2$, $-\frac{1}{3}(x-2)^3 < 0$

donc $g(x) - [-1 + \frac{1}{2}(x-2)] < 0$

donc $\mathcal{C}_g$ est en-dessous de $\mathcal{T}$

si $x < 2$: $-\frac{1}{2}(x-2)^3 > 0$

donc $g(x) - [-1 + \frac{1}{2}(x-2)] > 0$

donc $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{T}$.