

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 15 - SUJET A

Vendredi 7 mars 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Monsieur Dubouchon déjeune tous les midis au restaurant "À la Bonne Fourchette". On y sert deux types de menus : Un menu végétarien et un menu steak-frites.

Le premier jour ("jour 1"), Monsieur Dubouchon choisit le menu végétarien avec probabilité $\frac{1}{4}$. Ensuite, pour les jours suivants, pour tout entier naturel n non-nul :

- s'il a choisi le menu végétarien le jour n , alors il choisit le même menu le jour $n+1$.

- s'il a choisi le menu steak-frites le jour n , alors il choisit le menu végétarien le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{10}$, et le menu steak-frites avec probabilité $\frac{9}{10}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : "Monsieur Dubouchon a choisi le menu végétarien le jour n ".

On note p_n la probabilité de l'événement A_n .

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_{n+1} à l'aide de p_n . On pourra appliquer une formule du cours que l'on citera précisément.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de p_n en fonction de n .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
 - (a) Exprimer l'événement : "Monsieur Dubouchon choisit tous les jours un menu végétarien au cours des n premiers jours" à l'aide des événements $A_1, \dots, A_n$, puis donner sa probabilité.
 - (b) Exprimer l'événement : "Monsieur Dubouchon choisit tous les jours un menu steak-frites au cours des n premiers jours" à l'aide des événements $A_1, \dots, A_n$, puis donner sa probabilité.

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.

Calculons $P(A_{n+1})$ par la formule des probabilités totales, avec le système complet $(A_n, \bar{A}_n)$ vérifiant $P(A_n) \neq 0$, $P(\bar{A}_n) \neq 0$:

$$P(A_{n+1}) = \underbrace{P(A_n)}_{p_n} \underbrace{P(A_{n+1}|A_n)}_1 + \underbrace{P(\bar{A}_n)}_{1-p_n} \underbrace{P(A_{n+1}|\bar{A}_n)}_{\frac{1}{10}}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = p_n + \frac{1}{10}(1-p_n)$

donc $p_{n+1} = \frac{9}{10}p_n + \frac{1}{10}$

② $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.

On cherche $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = \frac{9}{10}l + \frac{1}{10}$. On trouve $l = 1$.

Puis $(p_n - 1)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{9}{10}$ et de 1er terme $p_1 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n - 1 = -\frac{3}{4} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$

③ a) cet événement est $\bigcap_{k=1}^n A_k$. D'après la formule des probabilités composées (possible car $P(\bigcap_{k=1}^n A_k) \neq 0$),

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \underbrace{P(A_1)}_{\frac{1}{4}} \underbrace{P(A_2)}_{1} \underbrace{P(A_3)}_{1} \dots \underbrace{P(A_n)}_{1} = \frac{1}{4}$$

(b) cet événement est $\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k$

$P(\bigcap_{k=1}^{n-1} \bar{A}_k) \neq 0$ donc on peut appliquer la formule des probabilités composées :

$$P(\bigcap_{k=1}^{n-1} \bar{A}_k) = \underbrace{P(\bar{A}_1)}_{\frac{3}{4}} \underbrace{P(\bar{A}_2)}_{\frac{9}{10}} \underbrace{P(\bar{A}_3)}_{\frac{9}{10}} \dots \underbrace{P(\bar{A}_n)}_{\frac{9}{10}}$$

$$= \frac{3}{4} \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 15 - SUJET B

Vendredi 7 mars 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Monsieur Laclope essaie d'arrêter de fumer. Le premier jour ("jour 1"), il fume avec probabilité $\frac{1}{3}$. Ensuite, pour les jours suivants, pour tout entier naturel n non-nul :

- s'il fume le jour n , alors il fume le jour $n+1$.

- s'il ne fume pas le jour n , alors il fume le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{10}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement : "Monsieur Laclope a fumé le jour n ".

On note p_n la probabilité de l'évènement A_n .

- Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_{n+1} à l'aide de p_n . On pourra appliquer une formule du cours que l'on citera précisément.
- En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de p_n en fonction de n .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
 - Exprimer l'évènement : "Monsieur Laclope fume tous les jours au cours des n premiers jours" à l'aide des évènements $A_1, \dots, A_n$, puis donner sa probabilité.
 - Exprimer l'évènement : "Monsieur Laclope ne fume pas au cours des n premiers jours" à l'aide des évènements $A_1, \dots, A_n$, puis donner sa probabilité.

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.

Calculons $P(A_{n+1})$ par la formule des probabilités totales, avec le système complet $(A_n, \bar{A}_n)$ vérifiant $P(A_n) \neq 0$, $P(\bar{A}_n) \neq 0$:

$$\underbrace{P(A_{n+1})}_{p_{n+1}} = \underbrace{P(A_n)}_{p_n} \underbrace{P_{A_n}(A_{n+1})}_1 + \underbrace{P(\bar{A}_n)}_{1-p_n} \underbrace{P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})}_{\frac{1}{10}}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = p_n + \frac{1}{10}(1-p_n)$

donc $p_{n+1} = \frac{9}{10}p_n + \frac{1}{10}$

② voir sujet A: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$

③ (a) Cet évènement est $\bigcap_{k=1}^n A_k$. Puisque $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$,

on a $\bigcap_{k=1}^n A_k = A_1$. Donc $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = P(A_1) = \frac{1}{3}$

(b) Cet évènement est $\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k$. $P\left(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k\right) \neq 0$ donc on peut appliquer la formule des probabilités composées :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k\right) = \underbrace{P(\bar{A}_1)}_{\frac{2}{3}} \underbrace{P_{\bar{A}_1}(\bar{A}_2)}_{\frac{9}{10}} \underbrace{P_{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2}(\bar{A}_3)}_{\frac{9}{10}} \dots \underbrace{P_{\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1}}(\bar{A}_n)}_{\frac{9}{10}} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$