Exercices donnés en colle cette semaine

Sujet 3

Exercice 1. On joue trois fois à pile ou face avec une pièce équilibrée. On définit la variable aléatoire X qui vaut 0 si on n'obtient jamais pile, et le numéro du tirage au cours duquel apparaît le premier pile sinon.

1. Déterminer l'univers Ω à considérer et la probabilité sur Ω.
2. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance et sa variance. Pour le calcul de la variance, on pourra utiliser la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Exercice 2. Deux personnes lancent indépendamment l'une de l'autre une pièce équilibrée n fois de suite. On note X et Y les VAR définies par le nombre de faces obtenues par chaque personne.

1. Quelles sont les lois de probabilités de X et Y ?
2. Calculer la probabilité de l'évènements $(X = Y)$.
3. En déduire la probabilité de $(X < Y)$.
   indication : écrire $\Omega = (X < Y) \cup (X = Y) \cup (Y < X)$. Que peut-on dire de $P(X < Y)$ et $P(Y > X)$?

Exercice 1 : (corrigé)

ne pas confondre l'univers et la probabilité sur Ω et : la VAR X et son univers image

① $\Omega = \{p, f\}^3 = \{(p,p,p), (p,p,f) \ldots\}$

on munit Ω de la probabilité uniforme car tous les résultats sont équiprobables (pièce équilibrée)

$\text{card}\,\Omega = 2^3 = 8$

② $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$

$(X=0) = \{(f,f,f)\}$ donc $\text{card}(X=0) = 1$, donc $P(X=0) = \dfrac{\text{card}(X=0)}{\text{card}\,\Omega} = \dfrac{1}{8}$

$(X=1) = \{(p,f,f), (p,p,f), (p,f,p), (p,p,p)\}$ donc $P(X=1) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$(X=2) = \{(f,p,p), (f,p,f)\}$ donc $P(X=2) = \dfrac{2}{8}$

$(X=3) = \{(f,f,p)\}$ donc $P(X=3) = \dfrac{1}{8}$

(on vérifie que $\sum_{k=0}^{3} P(X=k) = 1$)

On en déduit $E(X) = 0\,P(X=0) + 1\,P(X=1) + 2\,P(X=2) + 3\,P(X=3)$
$= \dfrac{4}{8} + 2\times\dfrac{2}{8} + 3\times\dfrac{1}{8} = \boxed{\dfrac{11}{8}}$

et $E(X^2) = 0^2 P(X=0) + 1^2 P(X=1) + 2^2 P(X=2) + 3^2 P(X=3)$
$= \dfrac{4}{8} + 4\times\dfrac{2}{8} + 9\times\dfrac{1}{8} = \dfrac{21}{8}$

Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{21}{8} - \left(\dfrac{11}{8}\right)^2 = \dfrac{168}{64} - \dfrac{121}{64} = \boxed{\dfrac{47}{64}}$

Exercice 2

1) On répète n fois les même experiences de manière indépendante. À chaque fois, la probabilité d'obtenir face est $\frac{1}{2}$.
Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

2) $(X=Y) = \bigcup_{k=0}^{n} ((X=k) \cap (Y=k))$

Or les évènements $(X=k) \cap (Y=k)$ sont 2 à 2 incompatibles donc :
$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} P((X=k) \cap (Y=k))$

De plus, les évènements $(X=k)$ et $(Y=k)$ sont indépendants donc: $P((X=k) \cap (Y=k)) = P(X=k)\, P(Y=k)$

Ainsi, $P(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\, P(Y=k)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \times \binom{n}{k} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2}_{\binom{2n}{n}}$$

TB

$\Omega = (X<Y) \cup (X=Y) \cup (Y<X)$

Or ces évènement sont deux à deux incompatibles donc

$P(\Omega) = P(X<Y) + P(X=Y) + P(Y<X)$ ✓ TB

De plus, par symétrie du problème, $P(X<Y) = P(Y<X)$

Donc $\underbrace{P(\Omega)}_{1} = 2P(X<Y) + P(X=Y)$

donc $1 = 2P(X<Y) + P(X=Y)$

donc $2P(X<Y) = 1 - P(X=Y)$

donc $P(X<Y) = \frac{1}{2}(1 - P(X=Y))$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

✓ TB