INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 17 - SUJET A

Vendredi 28 mars 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+2x) + e^{-x} - e^x}{x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, déterminer le prolongement.

1 Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ 1+2x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $\mathcal{D}_f = \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

2. On effectue un $DL_2(0)$ du numérateur :

$\ln(1+2x) \underset{0}{=} 2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{=} 2x - 2x^2 + o(x^2)$

$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$e^{-x} \underset{0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Donc $\ln(1+2x) + e^{-x} - e^x \underset{0}{=} -2x^2 + o(x^2)$

$\times \frac{1}{x^2}$

Donc $\dfrac{\ln(1+2x) + e^{-x} - e^x}{x^2} = -2 + o(1)$

On en déduit $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x) + e^{-x} - e^x}{x^2} = -2$

Remarque : il est inutile de passer par un équivalent le terme de degré 0 du DL donne toujours la limite.

Cette limite existe et elle est finie.

Donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant :

$$\boxed{\tilde{f} : \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x) + e^{-x} - e^x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

Exercice 2 - Soit

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x)} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Étudier la continuité de g sur son ensemble de définition.

* Sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:
g est le quotient de 2 fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, le dénominateur ne s'annulant pas.
Donc g est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

* En 0 : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$ donc par quotient des limites, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\ln x} = 0$. Or $g(0) = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0)$
On en déduit que g est continue en 0.

* Conclusion :
g est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et en 0. Donc g est continue sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

Remarque : l'ensemble de définition est $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$
On ne doit pas être gêné par le " $\setminus \{1\}$ "
On ne doit pas chercher à prolonger g par continuité en 1
(ce n'est pas demandé)

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 17 - SUJET B

Vendredi 28 mars 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - - Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, déterminer le prolongement.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} 1+2x \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$

donc $\mathcal{D}_f = [-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty[$

2. On fait un $DL_2(0)$ du numérateur :

$\sqrt{1+2x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2 + o(x^2)$

$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

donc $\sqrt{1+2x} - e^x \underset{0}{=} -x^2 + o(x^2)$

$\times \frac{1}{x^2}$

donc $\dfrac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2} \underset{0}{=} -1 + o(1)$

On en déduit $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2} = -1$

Cette limite existe et elle est finie. Donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant :

$$\boxed{\tilde{f} : [-\tfrac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

Exercice 2 - Soit

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Étudier la continuité de g sur son ensemble de définition.

(*) sur $\mathbb{R}_+^*$ g est le produit de 2 fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$

donc g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

(*) en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ par CC

Or $g(0)=0$

donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0)$

Donc g est continue en 0

(*) Conclusion : g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et en 0.

Donc g est continue sur $\mathbb{R}_+$