$\boxed{\text{Correction Exercice 1 ( TD dérivabilité)}}$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ x^2 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

<u>sur $\mathbb{R}_+^*$ :</u> g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ :

$x \longmapsto x^2$ , polynôme

$x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ,(composée de $x \longmapsto \frac{1}{x}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, par sin, dérivable sur $\mathbb{R}$.)

Donc $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$

<u>Sur $\mathbb{R}_-^*$ :</u> g est polynomiale donc elle <u>est dérivable</u> et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad g'(x) = 2x}$

<u>dérivabilité en 0 :</u> Ici, on constate que le taux d'accroissement s'exprime differemment à droite et à gauche de 0

Donc nous devons étudier la dérivabilité à droite et à gauche.

<u>À gauche :</u> $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 0}{x} = x$

donc $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{\text{existe}}{=} 0$ limite finie

donc <u>f est dérivable à gauche en 0 , et $f_g'(0) = 0$</u>

<u>À droite</u> : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}$

$= x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

c'est le produit d'une fonction bornée $\left(x \mapsto \sin\frac{1}{x}\right)$ et d'une fonction qui tend vers $0$ $(x \mapsto x)$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{\text{existe}}{=} 0$ limite finie

donc f est dérivable à droite en 0, et $f'_d(0)=0$

<u>Conclusion en 0</u> : f est dérivable à droite et à gauche en 0, ~~et~~ et $f'_d(0) = f'_g(0) = 0$

Donc f est dérivable en 0, et $f'(0)=0$

<u>Conclusion</u> : **g est dérivable sur $\mathbb{R}$** (car dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$, sur $\mathbb{R}_+^*$, et en 0)

et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ 2x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}}$

<u>Rq</u>: Puisque g est dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.