Devoir maison n°7bis
— Espaces vectoriels —

Exercice I

1. On pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=0\}$.
   (a) Déterminer deux vecteurs distincts de F.
   (b) Montrer (sans utiliser la définition de sous-espace vectoriel) que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $G = \{(2x+y, x-y, 3y, 5x-2y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.
   (a) Déterminer deux vecteurs non-colinéaires de G.
   (b) Montrer (sans utiliser la définition de sous-espace vectoriel) que G est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel que l'on précisera.
3. Soit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-y)(x+y)=0\}$.
   (a) Déterminer deux vecteurs non-colinéaires de H.
   (b) Représenter H dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (c) H est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$? Justifier rigoureusement.

Exercice II

Partie I. Dans cette partie (**et dans cette partie seulement !**), on pose

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y-3z+t=0\},\ G = \{(t,2t,-t,0), t \in \mathbb{R}\} \text{ et } u = (1,2,-1,0).$$

1. Montrer (sans utiliser la définition de sous-espace vectoriel) que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En déterminer une base $\mathscr{B}$ et la dimension.
2. Montrer (sans utiliser la définition de sous-espace vectoriel) que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En déterminer une base $\mathscr{C}$ et la dimension.
3. Montrer que la famille $\mathscr{D}$ obtenue en juxtaposant les familles $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ (notée "$\mathscr{B} \cup \mathscr{C}$") est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Quelles sont les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathscr{D}$?
5. Soit (a,b,c,d) un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Quelles sont les coordonnées de (a,b,c,d) dans la base $\mathscr{D}$?

Partie II. Plus généralement, soient F un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ et soit u un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'appartient pas à F. On pose $G = \text{vect}(u)$.

1. Montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
2. Soit $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ une base de F. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3, u) est une famille libre.
3. Qu'en déduit-on sur la famille (v_1, v_2, v_3, u) ?