Corrigé du devoir maison n° 7bis

Exercice 1.

1. On pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | 2x+y-z=0\}$.

   (a) $\boxed{(0,0,0) \in F}$ car $2.0+0-0=0$. $\boxed{(1,0,2) \in F}$ car $2.1+0-2=0$

   (b) Voir cours

2. Soit $G = \{(2x+y, x-y, 3y, 5x-2y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

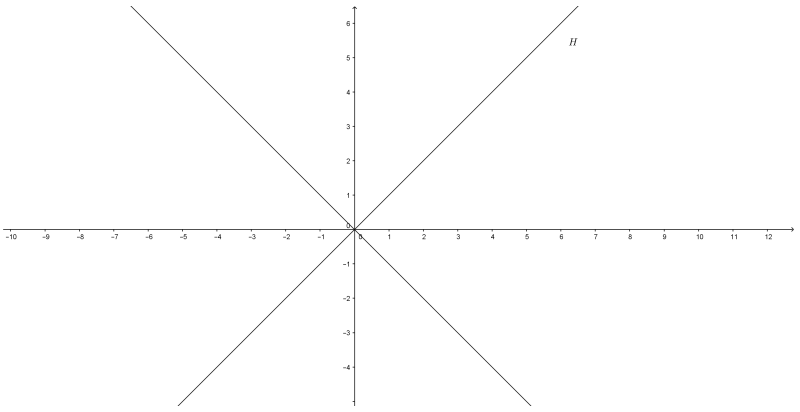
   (a) $\boxed{(2,1,0,5) \text{ et } (1,-1,3,-2) \text{ sont deux vecteurs non-colinéaires de } G}$ (obtenus en posant $(x,y)=(1,0)$ puis $(x,y)=(0,1)$).

   (b) $G = \{x(2,1,0,5)+y(1,-1,3,-2),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Donc, par définition, $G = \text{vect}((2,1,0,5),(1,-1,3,-2))$. Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (puisque les vecteurs $(2,1,0,5)$ et $(1,-1,3,-2)$ appartiennent à $\mathbb{R}^4$ et que les combinaisons linéaires sont à coefficients réels).

3. Soit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | (x-y)(x+y)=0\}$.

   (a) $\boxed{(1,1) \text{ et } (1,-1) \text{ sont deux vecteurs non-colinéaires de } H}$

   (b) Représentation de H : c'est la réunion des deux droites d'équations $y=x$ et $y=-x$.



   (c) Posons $u=(1,1)$ et $v=(1,-1)$.
   $u \in H$ car $(1-1)(1+1)=0$. De même $v \in H$ car $(1-(-1))(1+(-1))=0$.
   Mais $u+v=(2,0) \notin H$ car $(2+0)(2-0) \neq 0$. Donc H n'est pas stable par combinaison linéaire.
   Donc $\boxed{H \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$.

Exercice 2.
Partie I.

1. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+2y-3z+t=0\} = \{(x,y,z,-x-2y+3z) \in \mathbb{R}^4\}$
   donc $\boxed{F = \text{Vect}((1,0,0,-1),(0,1,0,-2),(0,0,1,3))}$. C'est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et la famille $\mathcal{B} = ((1,0,0,-1),(0,1,0,-2),(0,0,1,3))$ en est une famille génératrice. Etudions sa liberté.
   Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1,0,0,-1)+\lambda_2(0,1,0,-2)+\lambda_3(0,0,1,3)=(0,0,0,0)$.
   $$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$ La famille est donc une base de F et $\boxed{\dim(F)=3}$.

2. $G = \{(t,2t,-t,0), t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,2,-1,0))$. C'est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et la famille $\mathcal{C} = (1,2,-1,0)$ est une base de G donc $\boxed{\dim(G)=1}$.

3. La famille $\mathcal{D}$ contient 4 vecteurs et $\mathbb{R}^4$ est un espace vectoriel de dimension 4. On va etudier la liberté de $\mathcal{D}$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1(1,0,0,-1)+\lambda_2(0,1,0,-2)+\lambda_3(0,0,1,3)+\lambda_4(1,2,-1,0) = (0,0,0,0)$.
$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. La famille $\mathcal{D}$ est libre, donc c'est $\boxed{\text{une base de } \mathbb{R}^4}$.

4. $u = 0(1,0,0,-1) + 0(0,1,0,-2) + 0(0,0,1,3) + 1(1,2,-1,0)$
donc $\boxed{\text{les coordonnées de } u \text{ dans la base } \mathcal{D} \text{ sont } (0,0,0,1)}$.

5. Soit (a,b,c,d) un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ uniques tel que
$\lambda_1(1,0,0,-1) + \lambda_2(0,1,0,-2) + \lambda_3(0,0,1,3) + \lambda_4(1,2,-1,0) = (a,b,c,d)$.
$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = a \\ \lambda_2 + 2\lambda_4 = b \\ \lambda_3 - \lambda_4 = c \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = d \end{cases} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_1}{\Rightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = a \\ \lambda_2 + 2\lambda_4 = b \\ \lambda_3 - \lambda_4 = c \\ -2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = d + a \end{cases} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2}{\Rightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = a \\ \lambda_2 + 2\lambda_4 = b \\ \lambda_3 - \lambda_4 = c \\ 3\lambda_3 + 5\lambda_4 = d + a + 2b \end{cases}$

$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3}{\Rightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = a \\ \lambda_2 + 2\lambda_4 = b \\ \lambda_3 - \lambda_4 = c \\ 8\lambda_4 = d + a + 2b - 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - \dfrac{d+a+2b-3c}{8} = \dfrac{-d+7a-2b+3c}{8} \\ \lambda_2 = b - 2\dfrac{d+a+2b-3c}{8} = \dfrac{-2a+4b+6c-2d}{8} = \dfrac{-a+2b+3c-d}{4} \\ \lambda_3 = c + \dfrac{d+a+2b-3c}{8} = \dfrac{d+a+2b+5c}{8} \\ \lambda_4 = \dfrac{d+a+2b-3c}{8} \end{cases}$

Finalement, les coordonnées de (a,b,c,d) dans la base $\mathcal{D}$ sont :
$\boxed{\left(\dfrac{-d+7a-2b+3c}{8}, \dfrac{-a+2b+3c-d}{4}, \dfrac{d+a+2b+5c}{8}, \dfrac{d+a+2b-3c}{8}\right)}$.

Partie II. Plus généralement, soient F un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ et soit u un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'appartient pas à F. On pose $G = \text{vect}(u)$.

1. F et G sont deux sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donc $0_{\mathbb{R}^4} \in F \cap G$ donc $\{0_{\mathbb{R}^4}\} \subset F \cap G$.
Soit $v \in F \cap G$. $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda.u$ (car $v \in G$).
Si $\lambda \neq 0$, alors $u = \dfrac{1}{\lambda}.v$ donc $u \in F$. C'est absurde. Donc $\lambda = 0$ et $v = 0_{\mathbb{R}^4}$. Donc, $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
Par double inclusion, $\boxed{F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}}$.

2. Montrons que la famille (v_1, v_2, v_3, u) est une famille libre :
Soient x, y, z, $t \in \mathbb{R}$ fixés quelconques tels que $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tu = 0_{\mathbb{R}^4}$.
Alors $xv_1 + yv_2 + zv_3 = -tu$.
Le vecteur $xv_1 + yv_2 + zv_3$ appartient à F car c'est une combinaison linéaire de vecteurs de F. Par ailleurs, ce vecteur appartient à G car il est égal à $-tu$. Donc ce vecteur appartient à $F \cap G$.
Or $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Donc $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$.
Or la famille (v_1, v_2, v_3) est libre (c'est une base de F). On en déduit que $x = y = z = 0$.
Puis : $-tu = 0_{\mathbb{R}^4}$, avec $u \neq 0_{\mathbb{R}^4}$. Donc $t = 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (v_1, v_2, v_3, u) \text{ est libre.}}$

3. C'est une famille libre de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4. On en déduit que $\boxed{(v_1, v_2, v_3, u) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$.