

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 17 - SUJET A

Vendredi 28 mars 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(1+2x) + e^{-x} - e^x}{x^2}$.1. Déterminer l'ensemble de définition de f .2. f est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui, déterminer le prolongement.1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1+2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \mathcal{D}_f =]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty[$$

2. On effectue un DL₂(0) du numérateur :

$$\ln(1+2x) \underset{0}{=} 2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{=} 2x - 2x^2 + o(x^2)$$

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^{-x} \underset{0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{Donc } \ln(1+2x) + e^{-x} - e^x \underset{0}{=} -2x^2 + o(x^2)$$

$$\text{Donc } \frac{\ln(1+2x) + e^{-x} - e^x}{x^2} = -2 + o(1)$$

$$\times \frac{1}{x^2}$$

$$\text{On en déduit } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) + e^{-x} - e^x}{x^2} = -2$$

Cette limite existe et elle est finie.

Remarque: il est inutile de passer par un équivalent le terme de degré 0 du DL donne toujours la limite.

Donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant :

$$\tilde{f} :]-\frac{1}{2}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+2x) + e^{-x} - e^x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 - Soit

$$g: \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de g sur son ensemble de définition.

- ④ Sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:
 g est le quotient de 2 fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, le dénominateur ne s'annulant pas.
Donc g est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

④ En 0: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{cases}$ donc par quotient des limites, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} = 0$. Or $g(0) = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$

On en déduit que g est continue en 0.

- ④ Conclusion:
 g est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et en 0. Donc g est continue sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

Remarque: l'ensemble de définition est $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

On ne doit pas être gêné par le " $\setminus \{1\}$ "

On ne doit pas chercher à prolonger g par continuité en 1 (ce n'est pas demandé)

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 17 - SUJET B

Vendredi 28 mars 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. f est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui, déterminer le prolongement.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \mathcal{D}_f = \left[-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty[$$

2. On fait un DL₂(0) du numérateur :

$$\sqrt{1+2x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2 + o(x^2)$$

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{donc } \sqrt{1+2x} - e^x \underset{0}{=} -x^2 + o(x^2) \quad \downarrow \times \frac{1}{x^2}$$

$$\text{donc } \frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2} \underset{0}{=} -1 + o(1)$$

$$\text{On en déduit } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2} = -1$$

Cette limite existe et elle est finie. Donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant :

$$\tilde{f} :]-\frac{1}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 - Soit

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de g sur son ensemble de définition.

④ sur $\mathbb{R}_+^*$ g est le produit de 2 fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$
donc g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

④ en 0: $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ par CC
Or $g(0) = 0$
donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$
Donc g est continue en 0

④ Conclusion: g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et en 0.
Donc g est continue sur $\mathbb{R}_+$