CORRECTION

NOM : **BCPST 12**

Interrogation écrite numéro 18.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 18 - SUJET A

Vendredi 4 avril 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+2x) - \sin(2x)}{x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer le prolongement $\tilde{f}$.
3. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0.

① Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} 1+2x>0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$

donc $\mathcal{D}_f =]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty[$

② $\begin{cases} \ln(1+y) \underset{0}{=} y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + o(y^3) \\ \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0 \end{cases}$

donc par substitution, $\ln(1+2x) \underset{0}{=} 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$

de même, $\sin y \underset{0}{=} y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$

donc par substitution, $\sin(2x) \underset{0}{=} 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$

Donc par combinaison linéaire des DL, $\ln(1+2x) - \sin(2x) = -2x^2 + 4x^3 + o(x^3)$

On multiplie par $\frac{1}{x^2}$, d'où : $\dfrac{\ln(1+2x) - \sin 2x}{x^2} = -2 + 4x + o(x)$

On déduit de ce DL que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$. Cette limite existe et elle est finie, donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant :

$$\tilde{f} :]-\tfrac{1}{2}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x) - \sin(2x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

③ dérivabilité de $\tilde{f}$ en 0 : $\forall x \in]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty[$, $\dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x-0} = \dfrac{\frac{\ln(1+2x) - \sin 2x}{x^2} + 2}{x}$

$= \dfrac{\ln(1+2x) - \sin(2x) + 2x^2}{x^3}$

Or $\ln(1+2x) - \sin(2x) + 2x^2 \underset{0}{=} 4x^3 + o(x^3)$ $\quad \times \frac{1}{x^3}$

donc $\dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x-0} \underset{0}{=} 4 + o(1)$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x-0} \underset{\text{existe}}{=} 4$ cette limite est finie donc $\tilde{f}$ est dérivable en 0, et $\tilde{f}'(0) = 4$

Exercice 2 - Montrer, en appliquant la formule des accroissements finis, que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\cos(y) - \cos(x)| \leqslant |y - x|$$

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixés quelconques.

- si $x = y$, on a bien $|\underbrace{\cos(y) - \cos(x)}_{0}| \leq |\underbrace{y - x}_{0}|$

- si $x < y$: cos est continue sur $[x,y]$, dérivable sur $]x,y[$, donc d'après la formule des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $\dfrac{\cos(y) - \cos(x)}{y - x} = \cos'(c)$

  Or $\cos'(c) = -\sin(c)$. D'où, en prenant la valeur absolue :

  $$\left| \frac{\cos y - \cos x}{y - x} \right| = |\cos'(c)| \leq 1 \quad \text{car } \underbrace{\forall t \in \mathbb{R},\ |\cos t| \leq 1}_{\text{(bien connu)}}$$

  Ainsi $\dfrac{|\cos y - \cos x|}{|y - x|} \leq 1$

  On multiplie par $|y - x| > 0$, d'où $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$

- si $y < x$: on montre de même (en inversant les rôles de x et y) que $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

  Or $|\cos x - \cos y| = |\cos y - \cos x|$ et $|y - x| = |x - y|$

  d'où $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$

<u>Conclusion</u> : dans tous les cas, $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$

Ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\cos y - \cos x| \leq |y - x|$

CORRECTION

NOM : **BCPST 12**

Interrogation écrite numéro 18.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 18 - SUJET B

Vendredi 4 avril 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}}}{x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement $\tilde{f}$.
3. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0.

① Soit $x \in \mathbb{R}$.
$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} 1+x \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ donc $\mathcal{D}_f = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$

② $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

$\begin{cases} e^y \underset{0}{=} 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) \\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{2} = 0 \end{cases}$

donc par substitution, $e^{\frac{x}{2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)$

Ainsi, $\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}} \underset{0}{=} -\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$ $\times \frac{1}{x^2}$

donc $\dfrac{\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}}}{x^2} = -\frac{1}{4} + \frac{x}{24} + o(x)$

On en déduit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\frac{1}{4}$ Cette limite existe et elle est finie,

donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant :

$$\tilde{f} : [-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}}}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

③ Dérivabilité de $\tilde{f}$ en 0 :

$\forall x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $\dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \dfrac{\frac{\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}}}{x^2} + \frac{1}{4}}{x} = \dfrac{\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{4}}{x^3}$

Or $\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{4} \underset{0}{=} \frac{x^3}{24} + o(x^3)$ (d'après le DL précédent)

donc (en $\times \frac{1}{x^3}$) $\dfrac{\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{4}}{x^3} \underset{0}{=} \frac{1}{24} + o(1)$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} \underset{\text{existe}}{=} \frac{1}{24}$ cette limite est finie donc $\tilde{f}$ est dérivable

en 0 et $\tilde{f}'(0) = \frac{1}{24}$.

Exercice 2 Montrer, en appliquant la formule des accroissements finis, que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ |e^y - e^x| \geqslant |y-x|$$

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ fixés quelconques.

- si $x = y$, on a bien $|e^y - e^x| \geqslant |y-x|$

- si $x < y$: exp est continue sur $[x,y]$, dérivable sur $]x,y[$

donc d'après la formule des accroissements finis,
il existe $c \in]x,y[$ tel que $\dfrac{e^y - e^x}{y-x} = \exp'(c)$

Or $\exp'(c) = \exp(c)$ et $c \geqslant 0$ donc $\exp(c) \geqslant 1$

donc $\left|\dfrac{e^y - e^x}{y-x}\right| = |\underbrace{\exp(c)}_{\geqslant 0}| = \exp(c) \geqslant 1$

on multiplie par $|y-x| > 0$, d'où $|e^y - e^x| \geqslant |y-x|$

- si $y < x$, on montre de même (en inversant les rôles de x et y) que $|e^x - e^y| \geqslant |x-y|$

Or $|e^x - e^y| = |e^y - e^x|$ et $|x-y| = |y-x|$

d'où $|e^y - e^x| \geqslant |y-x|$

Conclusion : dans tous les cas, $|e^y - e^x| \geqslant |y-x|$

Ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $|e^y - e^x| \geqslant |y-x|$