CORRECTION

avec le cours de jeudi 10/04
↳ + de résultats connus

NOM :

BCPST 12
Interrogation écrite numéro 19.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 19 - SUJET A

Jeudi 10 avril 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice - Les familles suivantes sont-elles libres ? sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$? Sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$? On répondra aux questions dans l'ordre qu'on voudra.

1. $\mathcal{F} = ((1,1,2),(3,-1,1),(1,0,1))$.
2. $\mathcal{G} = ((1,-1,-1),(2,1,4),(-1,1,1))$.
3. $\mathcal{H} = ((1,2,1),(0,1,0))$.

1 * $\mathcal{F}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

- $(1,1,2),(3,-1,1),(1,0,1) \in \mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{vect}\,\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$
- On se demande si $\mathbb{R}^3 \subset \mathrm{vect}\,\mathcal{F}$:

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ fixé quelconque.
On cherche $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x(1,1,2) + y(3,-1,1) + z(1,0,1) = (a,b,c)$ (S)

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ x - y = b \\ 2x + y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a & \\ -4y - z = b-a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -5y - z = c-a & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

on échange les inconnues

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + 3y = a & \\ -z - 4y = b-a & \\ -y = c-b & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

ce système est échelonné, de Cramer, donc il a une (unique) solution.

Donc il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x(1,1,2) + y(3,-1,1) + z(1,0,1) = (a,b,c)$
Donc $(a,b,c) \in \mathrm{vect}(\mathcal{F})$
Ainsi, $\mathbb{R}^3 \subset \mathrm{vect}\,\mathcal{F}$

- Conclusion : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{vect}\,\mathcal{F}$. Donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une famille génératrice de } \mathbb{R}^3}$

* $\begin{cases} \mathcal{F} \text{ est une famille génératrice de } \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{card}\,\mathcal{F} = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \in \mathbb{N} \text{ (dimension finie)} \end{cases}$

donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$. Donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est libre}}$

② • $\mathcal{G} = ((1,-1,-1), (2,1,4), (-1,1,1))$

On remarque que $\begin{cases} 1(1,-1,-1) + 0(2,1,4) + 1(-1,1,1) = (0,0,0) \\ (1,0,1) \neq (0,0,0) \end{cases}$

donc $\boxed{\mathcal{G} \text{ est liée}}$ - Donc $\boxed{\mathcal{G} \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^3}$

• Si $\mathcal{G}$ était une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, comme card $\mathcal{G} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ $(\in \mathbb{N})$ $\mathcal{G}$ serait une base de $\mathbb{R}^3$. Or ce n'est pas le cas car $\mathcal{G}$ n'est pas libre.

Donc $\boxed{\mathcal{G} \text{ n'est pas génératrice de } \mathbb{R}^3}$

③ $\mathcal{H} = ((1,2,1), (0,1,0))$

• card $\mathcal{H} = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$ donc $\boxed{\mathcal{H} \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^3}$

• card $\mathcal{H} = 2 < \dim \mathbb{R}^3$ donc $\boxed{\mathcal{H} \text{ n'est pas une famille génératrice de } \mathbb{R}^3}$ (puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ a au-moins 3 vecteurs)

• $\mathcal{H}$ est composée de $\underline{\underline{2}}$ vecteurs non-colinéaires donc $\boxed{\mathcal{H} \text{ est libre.}}$

CORRECTION

NOM : (avec le cours de lundi 7/04) **BCPST 12**

Interrogation écrite numéro 19.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 19 - SUJET B

Jeudi 10 avril 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice - Les familles suivantes sont-elles libres ? sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$? Sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$? On répondra aux questions dans l'ordre qu'on voudra.

1. $\mathcal{F} = ((1,1,3),(0,1,-1),(1,2,1))$.
2. $\mathcal{G} = ((2,-2,1),(0,1,1))$.
3. $\mathcal{H} = ((1,2,-1),(-1,1,1),(-1,4,1))$.

1) * $\mathcal{F}$ est-elle libre ?

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$x(1,1,3) + y(0,1,-1) + z(1,2,1) = (0,0,0) \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 & L2 \leftarrow L2 - L1 \\ -y - 2z = 0 & L3 \leftarrow L3 - 3L1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$ système échelonné, (de Cramer.)

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Donc } \mathcal{F} \text{ est libre.}}$

* $\mathcal{F}$ est elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

• $(1,1,3), (0,1,-1), (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ donc $\text{vect}\,\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$

• On se demande si $\mathbb{R}^3 \subset \text{vect}\,\mathcal{F}$:

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ fixé quelconque.

On cherche $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x(1\ 1\ 3) + y(0\ 1\ -1) + z(1\ 2\ 1) = (a,b,c)$ (S)

$$(S) \iff \begin{cases} x + z = a \\ x + y + 2z = b \\ 3x - y + z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = a \\ y + z = b - a & L2 \leftarrow L2 - L1 \\ -y - 2z = c - 3a & L3 \leftarrow L3 - 3L1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = a \\ y + z = b - a \\ -z = -4a + b + c \end{cases}$$ le système est échelonné. Il est de Cramer donc il admet une (unique) solution

Donc il existe x, y, z solutions de (S)

Donc $(a,b,c) \in \text{vect}\,\mathcal{F}$

Ainsi, $\mathbb{R}^3 \subset \text{vect}\,\mathcal{F}$

• Conclusion : on déduit que $\mathbb{R}^3 = \text{vect}\,\mathcal{F}$. $\boxed{\text{Donc } \mathcal{F} \text{ est une famille génératrice de } \mathbb{R}^3.}$

⊛ $\mathcal{F}$ est libre, génératrice de $\mathbb{R}^3$, donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

② • card $\mathcal{G} = 2 \neq \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3}$ donc $\boxed{\mathcal{G} \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^3}$

• $\mathcal{G}$ est une famille de deux vecteurs non-colinéaires, donc $\boxed{\mathcal{G} \text{ est une famille libre}}$.

• Si $\mathcal{G}$ était génératrice de $\mathbb{R}^3$, comme elle est libre, elle serait une base de $\mathbb{R}^3$. Or ce n'est pas le cas. Donc $\boxed{\mathcal{G} \text{ n'est pas génératrice de } \mathbb{R}^3}$

③ • On remarque que $(-1,4,1) = (1,2,-1) + 2(-1,1,1)$ (un des vecteurs est CL des autres)
donc la famille $\boxed{\mathcal{H} \text{ est liée}}$

• Donc $\boxed{\mathcal{H} \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^3}$

• Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ fixé quelconque
On cherche $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x(1,2,-1) + y(-1,1,1) + z(-1,4,1) = (a,b,c)$ (S

$$(S) \iff \begin{cases} x - y - z = a \\ 2x + y + 4z = b \\ -x + y + z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - z = a \\ 3y + 6z = b - 2a \\ \boxed{0 = c + a} \end{cases} \longrightarrow$$

ce système a une équation de compatibilité

Par exemple, si $(a,b,c) = (1,1,1)$, la condition de compatibilité n'est pas satisfaite donc (S) n'a pas de solution.

Donc $(1,1,1)$ n'est pas CL des vecteurs de $\mathcal{H}$.

Donc $\mathbb{R}^3 \not\subset \mathrm{vect}(\mathcal{H})$

Donc $\mathbb{R}^3 \neq \mathrm{vect}(\mathcal{H})$

Donc $\boxed{\mathcal{H} \text{ n'est pas une famille génératrice de } \mathbb{R}^3}$.