Devoir maison n°7
— Entrainement Dérivabilité —

Problème

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

1. Étude de f et tracé de sa courbe représentative
   (a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. 0n note encore f le prolongement. Donc désormais, f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f' sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) f est-elle continue en 0 ? Montrer que f est dérivable en 0, et préciser $f'(0)$. L'application f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
   (d) Afin d'étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, nous introduisons la fonction $g : x \mapsto x\cos x - \sin x$.
      i. Étudier le signe de g sur $[0,\pi]$, puis les variations de f sur $[0,\pi]$.
      ii. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$ fixé.
      Montrer que l'équation $(\mathscr{E}_n)$: $x\cos x = \sin x,\ \ x \in [n\pi,(n+1)\pi]$ admet une unique solution $x_n \in [n\pi,(n+1)\pi]$,
      et en déduire le signe de g sur $[n\pi,(n+1)\pi]$, et les variations de f sur $[n\pi,(n+1)\pi]$.
      Une discussion sur la parité de n intervient.
   (e) Étudier la limite de f en $+\infty$ et préciser la nature de la branche infinie.
   (f) Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0,6\pi]$.
2. Établissons une inégalité utile :
   (a) Montrer que
   $$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}], -\frac{x^2}{2} \leqslant x\cos x - \sin x$$
   (b) En déduire que $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
   (c) Déduire de la question précédente que $\forall (x,y) \in [0,\frac{\pi}{2}]^2,\ |f(y)-f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|y-x|$.
3. On considère la suite (u_n) définie par :
   $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
   (a) Montrer que $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ f(x) \in [0,\frac{\pi}{2}]$ (on dit que $[0,\frac{\pi}{2}]$ est stable par f).
   (b) En déduire que la suite (u_n) est à valeurs dans $[0,\frac{\pi}{2}]$.
   (c) Montrer que sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution notée α.
   (d) Montrer que $\alpha < 1$.
   (e) Montrer, en utilisant le résultat de la question 2c, que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|,$$
   puis que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

(f) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

(g) Sachant que $\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 3,32$ (valeur approchée à 10^{-2} près par défaut), déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

4. Informatique.

   (a) Écrire une fonction python `suite(n)` qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie le terme u_n de la suite.

   (b) Écrire une fonction python `valeurapprochee(eps)` qui prend en entrée un nombre réel strictement positif `eps` et qui renvoie une valeur approchée de α à `eps` près.