Corrigé du devoir maison n° 7

— —

Problème

1. (a) On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Cette limite existe et elle est finie, donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin x}{x} \text{ si } x > 0, \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

(b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, le dénominateur ne s'annulant pas. Donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$.
De plus, les règles de dérivations usuelles donnent : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.}$

(c) f est continue en 0 par construction (définition du prolongement par continuité en 0).
Étudions la limite du taux d'accroissement de f en 0 :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2}$.
Or $\sin x \underset{0}{=} x + o(x^2)$ donc $\sin x - x \underset{0}{=} o(x^2)$. Donc en multipliant par $\frac{1}{x^2}$: $\frac{\sin x - x}{x^2} \underset{0}{=} o(1)$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$, ou encore : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.
Cette limite existe et elle est finie, donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 de dérivée } f'(0) = 0.}$ Par ailleurs, nous avons vu que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, or $x\cos x - \sin x = o(x^2)$ (par opérations sur les développements limités), donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$. Donc f' est continue en 0.
Nous avons montré précédemment que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

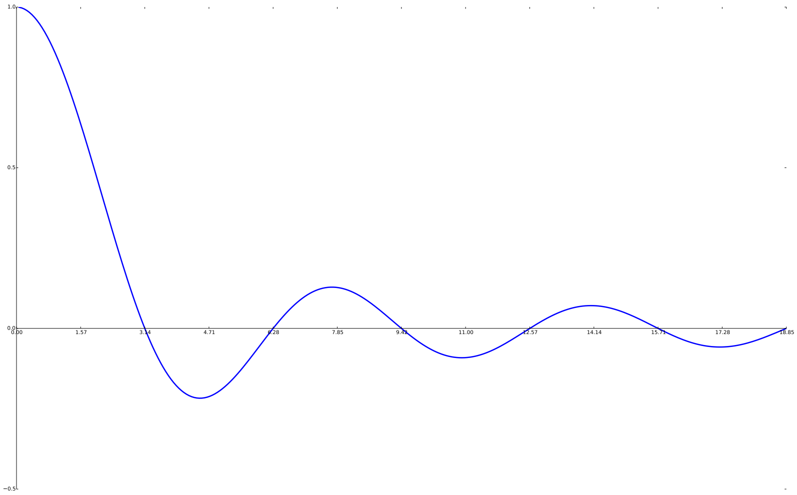
(d) i. g est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -x\sin x$.
Étudions le signe de g' sur $[0, \pi]$:
$\forall x \in [0,\pi],\ x \geqslant 0, \sin x \geqslant 0$. Donc $\forall x \in [0,\pi],\ g'(x) \leqslant 0$. De plus, sur $[0,\pi]$, $g'(x)$ s'annule seulement en $x = 0$ et $x = \pi$. Donc g est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.
De plus $g(0) = 0$. Donc $\boxed{\forall x \in]0,\pi],\ g(x) < 0, \text{ et } g(0) = 0.}$
Or $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. On déduit de l'étude précédente que $\forall x \in]0,\pi],\ f'(x) < 0$, et $f'(0) = 0$. Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0,\pi].}$

ii. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$ fixé.
Si n est pair : on pose $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.
$\forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[,\ g'(x) = -x\sin x < 0$, et $g'(2k\pi) = g'((2k+1)\pi) = 0$, donc g est strictement décroissante sur $[2k\pi, (2k+1)\pi]$. De plus g est continue sur $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, donc g réalise une bijection de $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ sur $g([2k\pi, (2k+1)\pi]) = [g((2k+1)\pi), g(2k\pi)] = [-(2k+1)\pi, 2k\pi]$.
Or $0 \in [-(2k+1)\pi, 2k\pi]$, donc par définition d'une bijection, 0 possède un unique antécédent sur $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, noté x_{2k}. Donc l'équation $x\cos x = \sin x$ possède une unique solution x_{2k} sur $[2k\pi, (2k+1)\pi]$.
Si n est impair : on pose $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}^*$.
$\forall x \in](2k-1)\pi, 2k\pi[,\ g'(x) = -x\sin x > 0$, et $g'(2k\pi) = g'((2k-1)\pi) = 0$, donc g est strictement croissante sur $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$. De plus g est continue sur $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, donc g réalise une bijection de $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ sur $g([(2k-1)\pi, 2k\pi]) = [g((2k-1)\pi), g(2k\pi)] = [-(2k-1)\pi, 2k\pi]$.
Or $0 \in [-(2k-1)\pi, 2k\pi]$, donc par définition d'une bijection, 0 possède un unique antécédent sur $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, noté x_{2k-1}. Donc l'équation $x\cos x = \sin x$ possède une unique solution x_{2k-1} sur $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\text{l'équation } (\mathcal{E}_n) \text{ admet une unique solution } x_n \in [n\pi, (n+1)\pi].}$ Ainsi, d'après l'étude précédente : g est strictement négative sur les intervalles $]x_{2k}, x_{2k+1}[$, strictement positive sur les intervalles $]x_{2k-1}, x_{2k}[$. Donc il en est de même pour f'. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Si n est pair :}\\ f \text{ est strictement croissante sur } [n\pi, x_n] \text{ et strictement décroissante sur } [x_n, (n+1)\pi].\\ \textbf{Si n est impair :}\\ f \text{ est strictement décroissante sur } [n\pi, x_n] \text{ et strictement croissante sur } [x_n, (n+1)\pi].\\ \text{De plus, } f \text{ s'annule en tous les } n\pi.\end{array}}$$

(e) Au voisinage de $+\infty$, f est le produit d'une fonction bornée (sinus) et d'une fonction qui tend vers 0. Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$. Donc la courbe représentative de f présente une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = 0 \text{ au voisinage de } +\infty.}$

(f) Allure de la courbe représentative de f sur $[0, 6\pi]$:



2. Établissons une inégalité utile :

(a) Définissons la fonction h suivante :

$$h: \begin{array}{lcl} [0, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\cos x - \sin x + \frac{x^2}{2} \end{array}$$

h est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (somme de fonctions dérivables) et
$\forall x_in[0, \frac{\pi}{2}],\ h'(x) = x - x\sin(x) = x(1 - \sin x) \geqslant 0$ (car $\sin x \leqslant 1$).
Donc h est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, $h(0) = 0$ donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ h(x) \geqslant 0$.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], -\frac{x^2}{2} \leqslant x\cos x - \sin x}$.

(b) Nous avons montré à la question 1(d)i que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ x\cos x - \sin x \leq 0$, donc en regroupant ce résultat avec la question précédente, on obtient : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], -\frac{x^2}{2} \leqslant x\cos x - \sin x \leqslant 0$. On multiplie par $\frac{1}{x^2} > 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, d'où : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0 \leqslant \frac{1}{2}$. D'où :
$\boxed{\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}}$.

(c) Voir cours (c'est l'inégalité des accroissements finis)

3. (a) Nous avons montré à la question 1(d)i que f est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Donc f est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, $f(0) = 1$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$.
Montrons que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ f(x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fixé quelconque.
$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. On applique f, décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, d'où $f(\frac{\pi}{2}) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$.
Donc $0 \leqslant \frac{2}{\pi} \leqslant f(x) \leqslant 1 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $f(x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. $\boxed{\text{Donc } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ est stable par } f}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : \text{"}u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]\text{"}$$

• $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 = 1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
Donc $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Puisque $[0, \frac{\pi}{2}]$ est stable par f, on en déduit que $f(u_n) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donc $u_{n+1} \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
• Conclusion : ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est à valeurs dans } [0, \frac{\pi}{2}]}$.

(c) On définit la fonction $k : x \mapsto f(x) - x$.
• k est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (somme de fonctions dérivables sur cet intervalle) et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ k'(x) = f'(x) - 1 < 0$ (car $f'(x) \leqslant 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$).
Donc k est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. De plus elle est continue sur cet intervalle. Donc d'après le théorème de la bijection, k réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur son image $k([0, \frac{\pi}{2}]) = [k(\frac{\pi}{2}), k(0)] = [\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{2}, 1]$.
• $0 \in [\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{2}, 1]$, ensemble d'arrivé de la bijection k (car $\frac{2}{\pi} < 1 < \frac{\pi}{2}$). Donc il existe un unique réel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $k(\alpha) = 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{sur } [0, \frac{\pi}{2}], \text{ l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution, } \alpha}$.

(d) $k(1) = f(1) - 1 = \sin(1) - 1 < 0$ car $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$.
Donc $k(1) < k(\alpha)$. Donc, puisque k est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\boxed{\alpha < 1}$.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : "|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|"$$

• $\mathcal{P}_0$ est vraie car $|u_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^0}|u_0 - \alpha|$ (en fait c'est une égalité).
• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
Puisque u_n et α appartiennent à $[0, \frac{\pi}{2}]$, d'après la question 2c, on a : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$. De plus, en multipliant par $\frac{1}{2} > 0$ l'inégalité donnée $\mathcal{P}_n$, on a $\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \alpha|$.
Donc $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \alpha|$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
• Conclusion : ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|.}$

De plus, $0 < \alpha < 1$ donc $0 < 1 - \alpha < 1$. Donc $|1 - \alpha| < 1$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}.}$

(f) Nous avons donc :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \text{ (suite géometrique de raison } \frac{1}{2} \in]-1, 1[) \end{cases}$$

On en déduit, par une proposition de cours sur les suites, que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } \alpha}$.

(g) On veut trouver un entier n tel que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$.
Puisque $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$, il suffit de trouver n tel que $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3}$. Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3} &\iff 2^n \geqslant 10^3 \\ &\iff n\ln(2) \geqslant 3\ln 10 \\ &\iff n \geqslant 3\frac{\ln 10}{\ln 2} \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 3,32$ à 10^{-2} près par défaut, donc $3,33 \geqslant \frac{\ln 10}{\ln 2}$, donc $9,99 \geqslant 3\frac{\ln 10}{\ln 2}$.
Donc si $n \geqslant 10$, l'inégalité $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3}$ est vérifiée.
Donc $\boxed{\text{pour } n = 10,\ u_n \text{ est une valeur approchée de } \alpha \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

4. Informatique.

(a)
```python
def suite(n):
    u = 1
    for i in range(n):
        u = sin(u)/u
    return u
```

(b)
```python
def valeurapprochee(eps):
    u = 1
    n = 0
    while 1/2**n > eps:
        u = sin(u)/u
        n = n + 1
    return u
```