

PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 26.

Semaine du lundi 5 mai au vendredi 9 mai 2025.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de la semaine 25.
2. Définition du rang d'une famille de vecteurs. Exemples : rang de $\mathcal{F} = ((1, 0), (0, 1))$ et de $\mathcal{G} = ((1, 0, -1), (2, 1, 0), (1, 1, 1))$.
3. Définition d'application linéaire. Remarques. Exemples : montrer que $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y, y)$ est linéaire, et que $g : (x, y) \mapsto xy$ ne l'est pas (préciser les espaces de départ et d'arrivée).
4. Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire. Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels à préciser.
5. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f : (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x + y + 2z, 2x + 3z)$. Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\text{Im} f$. Préciser si f est injective/surjective.
6. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est injective ssi...? et démonstration.

Thème de la colle :

CALCULS - Poser un exercice de la liste « EXOS-CHRONOS 10 ». L'exercice doit être fait en moins de 4 minutes.

ESPACES VECTORIELS

Définition générale d'espace vectoriel

Définition (hors programme). Exemples. Combinaisons linéaires.

Sous-espaces vectoriels

Définition. Exemples. Intersection, réunion de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

Famille génératrice. Famille libre.

Colinéarité de deux vecteurs. Cas particulier de deux vecteurs. Caractérisation des familles liées. Bases. Dimension. Exemples.

Famille génératrice et base (théorème de la base extraite et conséquences). Famille libre et base (théorème de la base incomplète et conséquences). Le théorème de la base incomplète est hors programme. Ses conséquences sont au programme).

Inclusion de deux sous-espaces vectoriels. Coordonnées. Rang d'une famille de vecteurs. Proposition : critère sur le rang pour qu'une famille de vecteur soit libre, génératrice de l'espace vectoriel. Représentation matricielle d'un vecteur par la matrice colonne de ses coordonnées dans une base.

APPLICATIONS LINÉAIRES

Applications linéaires

Définition. Opérations sur les applications linéaires : CL, composition, bijection réciproque.

Noyau et image d'une application linéaire

Définitions. $\ker f$ et $\text{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels de E et de F . CNS pour qu'une application linéaire soit injective. Traduction de la surjectivité d'une application linéaire f avec $\text{Im} f$.