PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 27.

Semaine du lundi 12 mai au vendredi 16 mai 2025.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de la semaine 26.
2. Définition du rang d'une application linéaire. Énoncé de la proposition reliant l'injectivité, surjectivité et la bijectivité d'une application linéaire et son rang. Énoncé et démonstration (simple, peut être faite à l'oral) des deux corollaires.
3. Exemple illustrant la question de cours précédente : montrer que $f(x, y, z) \mapsto (x+z, y+z, x+y+z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. (on admettra la linéarité).
4. Énoncé du théorème du rang. Le vérifier sur l'exemple :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x+y, x+z) \end{aligned}$$

5. Définition de la matrice d'une application linéaire f par rapport à des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Exemple : Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = ((1, 1), (1, -1))$. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x+2y, 2x+y) \end{aligned}$$

Justifier (oralement) que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, $Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ et $Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)$.

Thème de la colle :

CALCULS :

- L'examinateur donnera une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, et l'élève devra déterminer sa matrice par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.
- L'examinateur donnera une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, et l'élève déterminera l'application linéaire canoniquement associée.

ESPACES VECTORIELS

Tout le cours

APPLICATIONS LINÉAIRES

Applications linéaires

Définition. Opérations sur les applications linéaires : CL, composition, bijection réciproque.

Noyau et image d'une application linéaire

Définitions. $\ker f$ et $\text{Im} f$ sont des sev de E et de F . CNS pour qu'une application linéaire soit injective (surjective).

Rang d'une application linéaire

Image d'une base par une application linéaire. Rang d'une application linéaire. Proposition : f est injective $\iff \text{rg} f = \dim E$, f surjective $\iff \text{rg} f = \dim F$, f est bijective $\iff \text{rg} f = \dim E = \dim F$. Corollaires : Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, f est injective $\iff f$ est surjective $\iff f$ est bijective. Il n'existe pas d'isomorphisme entre deux espaces vectoriels de dimensions différentes.

Matrice d'une application linéaire

Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Application linéaire canoniquement associée à une matrice A . Expression matricielle de l'image d'un vecteur.