

PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 28.

Semaine du lundi 19 mai au vendredi 23 mai 2025.

**Questions de cours :**

1. Toutes les questions de la semaine 27.
2. Matrice d'un isomorphisme : proposition, démonstration.
3. Rappeler la définition du rang : d'une matrice, d'un système, d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire. Donner les liens entre les différents rangs (sans démonstration).
4. Tableau des primitives usuelles.
5. Propriétés de l'intégrale (Relation de Chasles. Linéarité. Positivité. Croissance. Inégalité de la moyenne) : énoncés (sans démonstration), interprétation graphique.
6. Montrer que la suite de terme général  $u_n = \int_0^1 (\ln t)^n dt$  est convergente.

**Thème de la colle :**

**CALCULS :**

- L'examineur donnera une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ , et l'élève devra déterminer sa matrice par rapport aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^n$ .
- L'examineur donnera une matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ , et l'élève déterminera l'application linéaire canoniquement associée.

**APPLICATIONS LINÉAIRES**

**Applications linéaires**

Définition. Opérations sur les applications linéaires : CL, composition, bijection réciproque.

**Noyau et image d'une application linéaire**

Définitions.  $\ker f$  et  $\text{Im} f$  sont des sev de  $E$  et de  $F$ . CNS pour qu'une application linéaire soit injective (surjective).

**Rang d'une application linéaire**

Image d'une base par une application linéaire. Rang d'une application linéaire. Proposition :  $f$  est injective  $\iff \text{rg} f = \dim E$ ,  $f$  surjective  $\iff \text{rg} f = \dim F$ ,  $f$  est bijective  $\iff \text{rg} f = \dim E = \dim F$ . Corollaires : Si  $f$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie,  $f$  est injective  $\iff f$  est surjective  $\iff f$  est bijective. Il n'existe pas d'isomorphisme entre deux espaces vectoriels de dimensions différentes.

**Matrice d'une application linéaire**

Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Application linéaire canoniquement associée à une matrice  $A$ . Expression matricielle de l'image d'un vecteur. Linéarité de la représentation. Matrice d'une composée. Matrice d'un isomorphisme.

**Rangs** Bilan sur les rangs : rang d'une matrice, rang d'un système, rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire. Rappel des définitions. Propositions : le rang d'une matrice  $A$  est le rang de l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes (ou lignes).

**INTÉGRATION :**

**Intégrale d'une fonction continue sur un segment.**

Définition : l'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe. Exemples

**Calcul d'une intégrale.**

Rappel : primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Tableau des primitives usuelles. Calcul de l'intégrale de  $f$  avec une primitive de  $f$ .

**Propriétés.**

Relation de Chasles. Linéarité. Positivité. Croissance. Inégalité de la moyenne. Inégalité triangulaire continue.