NOM :

BCPST 12
Interrogation écrite numéro 20.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 20 - SUJET A

Jeudi 15 mai 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à A.

1. Expliciter f.
2. On pose $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,0)$, $u_3 = (1,0,-1)$, et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
3. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$.
5. Question bonus : Montrer qu'il existe un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$. Un tel endomorphisme est-il unique ?

① $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \mapsto (4x+y+z,\ x+4y+z,\ x+y+4z)$

② Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$x(1,1,1)+y(1,-1,0)+z(1,0,-1)=(0,0,0) \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ -2y-z=0 & L2 \leftarrow L2-L1 \\ -y-2z=0 & L3 \leftarrow L3-L1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x+z+y=0 \\ -z-2y=0 \\ 3y=0 & L3 \leftarrow L3-2L2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y=0 \end{cases}$ donc $\mathcal{B}$ est libre.

③ $\begin{cases} \mathcal{B} \text{ est une famille libre de vecteurs de } \mathbb{R}^3 \\ \text{card } \mathcal{B} = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \text{ (dimension finie)} \end{cases}$

donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

④ $f(u_1) = (6,6,6) = 6(1,1,1) = 6u_1 + 0u_2 + 0u_3 \to$ 1ère colonne : $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(u_2) = (3,-3,0) = 3u_2 = 0u_1 + 3u_2 + 0u_3 \to$ 2e colonne : $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(u_3) = (+3,0,-3) = 3u_3 = 0u_1 + 0u_2 + 3u_3 \to$ 3e colonne : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

On en déduit

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(5) Question bonus : voir sujet B

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 20 - SUJET B

Jeudi 15 mai 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à A.

1. Expliciter f.
2. On pose $u_1 = (-1, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$, et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
3. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$.
5. Question bonus : Montrer qu'il existe un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$. Un tel endomorphisme est-il unique ?

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \mapsto (3x + y + z,\ x + 3y + z,\ x + y + 3z)$

(2) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$x(-1,1,0) + y(-1,0,1) + z(1,1,1) = (0,0,0) \iff \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -y + 2z = 0 & L2 \leftarrow L2 + L1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ 3z = 0 & L3 \leftarrow L3 + L2 \end{cases}$$

~~$-x - y + z = 0$~~

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$ Donc $\mathcal{B}$ est libre.

(3) $\begin{cases} \mathcal{B} \text{ est une famille libre de vecteurs de } \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{card}\, \mathcal{B} = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \text{ (dimension finie)} \end{cases}$
donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

(4) $f(u_1) = (-2, 2, 0) = 2(-1,1,0) + 0(-1,0,1) + 0(1,1,1)$ $\to$ 1ère colonne : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(u_2) = (-2, 0, 2) = 0(-1,1,0) + 2(-1,0,1) + 0(1,1,1)$ $\to$ 2e colonne : $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(u_3) = (5, 5, 5) = 5u_3 = 0u_1 + 0u_2 + 5u_3$ $\to$ 3e colonne : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

On en déduit.

$$\mathcal{M}at_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(5) Question bonus:

on appelle A la matrice précédente : $A = \mathcal{M}at_{BB}(f)$

* On pose $B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

Il existe un unique endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathcal{M}at_{BB}(g) = B$ (d'après cours, def-propo 1 p. 16)

Et puisque $B^2 = A$, on a $\mathcal{M}at_{BB}(g^2) = \mathcal{M}at_{BB}(f)$

d'où $g^2 = f$.

* Unicité ? Il n'y a pas unicité d'un tel endomorphisme

car par exemple, $B_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$ est telle que $B_1^2 = A$

L'unique endomorphisme $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathcal{M}at_{BB}(h) = B_1$

vérifie également $h^2 = f$, pourtant $h \neq g$

puisque $h(u_1) \neq g(u_1)$

$(h(u_1) = -\sqrt{2}\, u_1$ alors que $g(u_1) = \sqrt{2}\, u_1)$