

INTÉGRALES ET PRIMITIVES.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], \frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$.
2. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$. (on pourra considérer la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ et encadrer son intégrale sur $[k, k+1]$).
2. En déduire un encadrement de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Exercice 3.

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 2]$. Étudier la limite, quand x tend vers 1 de $\frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt$.
On pourra introduire une primitive de f sur $[0, 2]$ après avoir justifié son existence, et exprimer l'intégrale à l'aide de cette primitive.
2. Application : déterminer la limite, quand x tend vers 1 de $\frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^3}{1+t^3} dt$.

Exercice 4. Sommes de Riemann : Étudier les limites des suites :

1. $u_n = \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right],$
2. $v_n = n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right),$
3. $w_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}},$
4. $x_n = \sqrt[n]{\left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{2}{n}\right)\right) \dots \left(1 + \left(\frac{n}{n}\right)\right)}.$

Exercice 5. Calculer :

$$\int_0^1 (2x^2 + 3x - 5) dx, \int_1^y (x-1)\sqrt{x} dx, \int_1^2 \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx, \int_0^2 \frac{x+3}{x+1} dx \quad (1),$$

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1} dx, \int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx, \int_0^y \frac{e^x}{1+e^x} dx, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \quad (2)$$

$$\int_0^\pi (1 + \cos^2 x) \sin x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx, \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx, \int_0^y \frac{1}{x^2+2} dx, \quad (3), \int_0^1 x\sqrt{1+x} dx \quad (4)$$

Indications :

(1) Écrire : $x + 3 = (x + 1) + 2$.

(2) Pour toute la ligne, reconnaître $\frac{u'}{u}$ (s'intègre en $\ln |u|$).

(3) Écrire $\frac{1}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2 + 1}$ et penser à la dérivée de $\arctan$.

(4) Écrire $x\sqrt{1+x} = (x+1-1)\sqrt{1+x} = (x+1)^\alpha - \sqrt{1+x}$. (α à déterminer).

Exercice 6. Intégration par parties :

Rappel : Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

exemple : $\int_a^b t \sin t dt = [(-\cos t)t]_a^b - \int_a^b (-\cos t) dt$ (on a posé $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = t$).

Calculer : $\int_1^x \ln t dt$, $\int_0^1 te^{3t} dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2t) dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 \sin(2t) dt$

Exercice 7. Intégration par parties :

1. Déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ et préciser sur quel intervalle elle est définie.

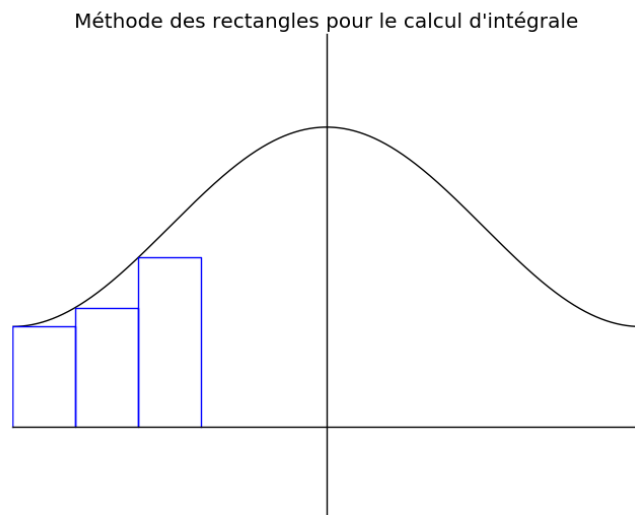
(*indication :* au numérateur, écrire $t^2 = (t^2 + 1) - 1$).

2. Calculer $\int_0^1 t \operatorname{Arctant} dt$. On fera une intégration par parties.

Exercice 8. Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$, alors le théorème de convergence

des sommes de Riemann dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{(b-a)}{n}) = \int_a^b f(t) dt$.

Chaque terme $\frac{(b-a)}{n} f(a + k \frac{(b-a)}{n})$ de la somme représente l'aire (algébrique) d'un petit rectangle :



On peut donc calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment en calculant la somme suivante, appelée **somme de Riemann associée à f** :

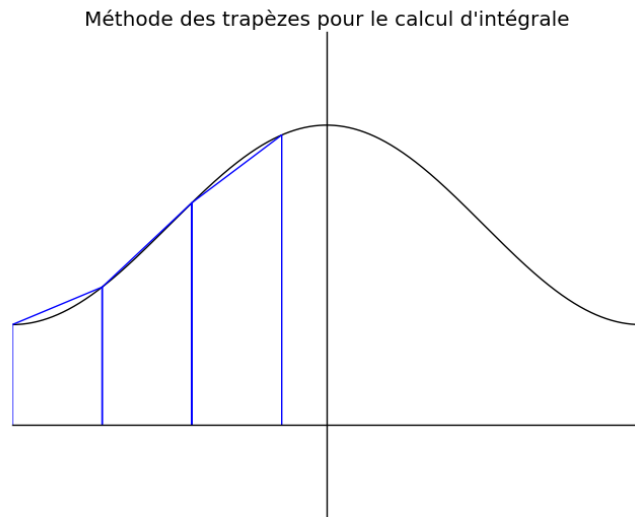
$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{(b-a)}{n}).$$

1. Écrire une fonction Python **rectangles(f,n,a,b)** qui calcule la somme de Riemann R_n d'une fonction f sur le segment $[a, b]$:

$$R_n(f) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{(b-a)}{n}\right).$$

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{4}{x^2 + 1}$. Quelle est la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$?
3. On peut montrer que si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors l'erreur commise ($|R_n - \int_a^b f(t) dt|$) est majorée par $\frac{(b-a)^3 \sup\{|f'(x)| | x \in [a, b]\}}{2n}$. En admettant que $|f'|$ est majorée par 3, en déduire un entier n pour lequel R_n est une valeur approchée de π à 10^{-3} près.

Exercice 9. On peut améliorer l'approximation précédente en remplaçant les rectangles par des trapèzes de sommets $(x_k, 0)$, $(x_{k+1}, 0)$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, $(x_k, f(x_k))$, où on a posé $\forall k \in \{0..n\}$, $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$.



On prend alors pour valeur approchée de $\int_a^b f(t) dt$ la somme T_n des aires des petits trapèzes ainsi construits.

1. Rappeler l'aire d'un trapèze et déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme T_n . (en fonction de f , a , b).
2. Écrire une fonction Python **trapezes(f,n,a,b)** qui calcule la somme T_n , pour une fonction f donnée, entre a et b .

CORRIGÉ INTÉGRALES ET PRIMITIVES.

Exercice 4.

1. $u_n = \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right].$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin k \frac{\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin k \frac{\pi}{n} \text{ (car } \sin 0 = 0 \text{ et } \sin \pi = 0).$$

On pose

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin \pi x \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

La fonction f est continue sur $[0, 1]$ donc par convergence de ses sommes de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 f(t) dt$$

Or

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \sin \pi t dt = \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^1 = -\frac{1}{\pi} (\cos \pi) - \cos 0 = \frac{2}{\pi}.$$

2. $v_n = n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right)$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)\right)^2}$$

Pour pouvoir appliquer le lemme 1 du cours, on doit légèrement modifier les bornes en ajoutant et retranchant des termes qui tendent vers 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)\right)^2} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{terme d'indice } n} - \underbrace{1}_{\text{terme d'indice } 0} \right]$$

Donc

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} + \underbrace{\frac{1}{4n} - \frac{1}{n}}_{\rightarrow 0}$$

On pose :

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{3}{4n}$$

La fonction f est continue sur $[0, 1]$ donc par convergence de ses sommes de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$$

Donc, par somme des limites (puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4n} = 0$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 f(t) dt$$

Or

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

On en déduit :

$$\lim v_n = \frac{1}{2}$$

$$3. w_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$$

(le premier terme (indice k=0) de cette dernière somme est nul)

Donc

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}}$$

On pose

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

La fonction f est continue sur $[0, 1]$ donc par convergence de ses sommes de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \int_0^1 f(t) dt$$

Or

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \sqrt{t} dt = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$4. x_n = \sqrt[n]{\left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{2}{n}\right)\right) \dots \left(1 + \left(\frac{n}{n}\right)\right)}.$$

Exercice 5.

Toutes les fonctions à intégrer sont continues sur les intervalles considérés, donc ces intégrales sont bien définies. $\int_0^1 (2x^2 + 3x - 5) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x \right]_0^1 = -\frac{17}{6}.$

$$\int_1^y (x-1)\sqrt{x} dx = \int_1^y x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_1^y$$

$$\int_1^2 \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{1-2x+x^2}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}} dx = \left[2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \right]_1^2 = \frac{14}{15}\sqrt{2} - \frac{16}{15}.$$

$$\int_0^2 \frac{x+3}{x+1} dx = \int_0^2 \frac{(x+1)+2}{x+1} dx = \int_0^2 1 + \frac{2}{x+1} dx = [x + 2 \ln|x+1|]_0^2 = 2 + 2 \ln 3.$$

$\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln |x^2+1| \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2} \ln 2$. (cette intégrale peut aussi se calculer en effectuant le changement de variable $t = x^2 + 1$).

$\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx = [\ln |x^2+x+2|]_0^2 = 2 \ln 2$ (cette intégrale peut aussi se calculer en effectuant le changement de variable $t = x^2 + x + 2$).

$\int_0^y \frac{e^x}{1+e^x} dx = [\ln |1+e^x|]_0^y$. (cette intégrale peut aussi se calculer en effectuant le changement de variable $t = e^x$).

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = [-\ln |\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2$ (cette intégrale peut aussi se calculer en effectuant le changement de variable $t = \cos x$).

$\int_0^{\pi} (1 + \cos^2 x) \sin x dx = -\int_0^{\pi} (1 + \cos^2 x)(-\sin x) dx = -\left[\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{8}{3}$ (cette intégrale peut aussi se calculer en effectuant le changement de variable $t = \cos x$).

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$? Linéarisons $\sin^3 x$: $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{(2i)^3} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) = \frac{1}{(2i)^2} \left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = -\frac{1}{4} (\sin 3x - 3 \sin x)$. D'où :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x) dx = \left[-\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx$? Linéarisons $\sin^2 x \cos^2 x$: $\sin^2 x \cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{-1}{16} (e^{2ix} - e^{-2ix})^2 = \frac{-1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} - 2) = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x)$. Ainsi :

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{8} (1 - \cos 4x) dx = \left[\frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}.$$

$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^2 u(x) u'(x) dx$, avec $u : x \mapsto \ln x$. Or $\int_1^2 u(x) u'(x) dx = \left[\frac{1}{2} u(x)^2 \right]_1^2$. D'où :

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 2)^2.$$

$$\int_0^y \frac{1}{x^2+2} dx = \int_0^y \frac{1}{2(1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2)} dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^y.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}} dx = \left[\operatorname{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^1 x \sqrt{1+x} dx = \int_0^1 (x+1-1) \sqrt{1+x} dx = \int_0^1 (x+1) \sqrt{1+x} dx - \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \int_0^1 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx - \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{5} (1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{15} (\sqrt{2}+1).$$

Exercice 6.

Calculer : $\int_1^x \ln t dt$, $\int_0^1 t e^{3t} dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2t) dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 \sin(2t) dt$

• $\int_0^1 t e^{3t} dt$?

On effectue une intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u'(t) = e^{3t} & u(t) = \frac{1}{3} e^{3t} \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{cases}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$.

$$\int_0^1 t e^{3t} dt = \left[\frac{t}{3} e^{3t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} e^{3t} dt$$

Donc

$$\int_0^1 t e^{3t} dt = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{e^{3t}}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{9}$$

Exercice 7.

1. la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$. Donc $t \mapsto t - \text{Arctant}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$.

2. la fonction $t \mapsto t \text{Arctant}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, 1]$. Donc cette intégrale est bien définie. Effectuons une intégration par parties en posant, $\forall t \in [0, 1], u(t) = \text{Arctant}, v(t) = \frac{t^2}{2}$. u et v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $\forall t \in [0, 1], u'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et $v'(t) = t$. Ainsi :

$$\int_0^1 t \text{Arctant} dt = \left[\frac{t^2}{2} \text{Arctant} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt.$$

Or nous venons de calculer une primitive de $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$. Ainsi,

$$\int_0^1 t \text{Arctant} dt = \left[\frac{t^2}{2} \text{Arctant} \right]_0^1 - \frac{1}{2} [t - \text{Arctant}]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$