INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 21 - SUJET A

Vendredi 23 mai 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Pour chacune des fonctions suivantes :
- Déterminer (sans justifier) son ensemble de définition.
- Déterminer une primitive sur un intervalle à préciser. Si plusieurs intervalles sont possibles, on en choisira un (maximal).

1. $f : x \mapsto \dfrac{3x}{x^2+3}$ $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+3>0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{3x}{x^2+3} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2x}{x^2+3}\right)$ forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+3>0$ (donc $\ln|u(x)| = \ln(x^2+3)$)

$\boxed{x \mapsto \frac{3}{2}\ln(x^2+3)}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. $g : x \mapsto \cos(2x)$ $\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R}}$

$\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x)}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$ $\boxed{\mathcal{D}_h = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}}$. On va déterminer une primitive $\boxed{\text{sur }]-\frac{1}{2}, +\infty[}$

$\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}\ln(2x+1)}$ en est une (c'est $\frac{1}{2}\ln|2x+1|$, avec $2x+1>0$)

4. $k : x \mapsto \sin(x)\cos^2(x)$ $\boxed{\mathcal{D}_k = \mathbb{R}}$. On détermine une primitive sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x)\cos^2(x) = -u'(x)[u(x)]^2$, où on a posé $u(x) = \cos(x)$

Donc $\boxed{x \mapsto -\frac{1}{3}\cos^3(x)}$ est une primitive de k sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 t^n \cos(t)\, dt$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 t^n \cos(t)\, dt$ est bien définie.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant t^n \cos(t) \leqslant t^n$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.
la fonction $t \mapsto t^n \cos(t)$ est continue sur $[0,1]$
donc son intégrale entre 0 et 1 existe.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Soit $t \in [0,1]$ fixé quelconque.
$[0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ et cos est à valeurs dans $[0,1]$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

donc $\forall t \in [0,1]$, $\quad 0 \leq \cos(t) \leq 1$

on multiplie par $t^n \geqslant 0$

donc $0 \leq t^n \cos(t) \leq t^n$

(3) Puis, par croissance et positivité de l'intégrale :

$$0 \leq \underbrace{\int_0^1 t^n \cos(t)\, dt}_{u_n} \leq \underbrace{\int_0^1 t^n\, dt}_{\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$, ces limites sont les mêmes

On en déduit, par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

NOM : **BCPST 12**

Interrogation écrite numéro 21.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 21 - SUJET B

Vendredi 23 mai 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Pour chacune des fonctions suivantes :
- Déterminer (sans justifier) son ensemble de définition.
- Déterminer une primitive sur un intervalle à préciser. Si plusieurs intervalles sont possibles, on en choisira un (maximal).

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{3x+1}$

$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}}$. On va déterminer une primitive de f $\boxed{\text{sur }]-\frac{1}{3}, +\infty[}$

$x \mapsto \frac{1}{3} \ln |\underbrace{3x+1}_{>0}|$ est une primitive de f sur $]-\frac{1}{3}, +\infty[$

c'est aussi : $\boxed{x \mapsto \frac{1}{3} \ln(3x+1)}$

2. $g : x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$

$\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R}}$. On va déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$

$\boxed{x \mapsto \frac{1}{3}\sin^3(x)}$ en est une

3. $h : x \mapsto \dfrac{5x}{x^2+5}$

$\boxed{\mathcal{D}_h = \mathbb{R}}$. On détermine une primitive sur $\mathbb{R}$.

$\dfrac{5x}{x^2+5} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{2x}{x^2+5}\right)$ forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+5 > 0$

$\boxed{x \mapsto \frac{5}{2} \ln(x^2+5)}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$

4. $k : x \mapsto \sin(3x)$

$\boxed{\mathcal{D}_k = \mathbb{R}}$. On détermine une primitive sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{x \mapsto -\frac{1}{3}\cos(3x)}$ est une primitive de k sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 t^n \sin(t)\, dt$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 t^n \sin(t)\, dt$ est bien définie.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant t^n \sin(t) \leqslant t^n$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

① Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.
la fonction $t \mapsto t^n \sin(t)$ est continue sur $[0,1]$ donc son intégrale entre 0 et 1 existe.

② Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [0,1]$. $\quad 0 \leq t \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$

donc $0 \leq \sin(t) \leq 1$ car sin est à valeurs dans $[0,1]$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\times t^n \geqslant 0$

d'où $0 \leq t^n \sin t \leq t^n$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ 0 \leq t^n \sin t \leq t^n$

③ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque
Par croissance et positivité de l'intégrale, (avec $0 \leq 1$) :

$$0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{(positivité)}}}{\leq} \int_0^1 t^n \sin t\, dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{(croissance)}}}{\leq} \int_0^1 t^n dt$$

donc $0 \leq u_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

Ainsi : $\begin{cases} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0 \end{cases}$, les limites sont les mêmes

On en déduit, par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \underset{\text{existe}}{=} 0$