

«EXOS-CHRONOS 11»

Exercice 1. Déterminer une primitive, sur un intervalle à préciser, de :

1. $f : x \mapsto x^3$

2. $g : x \mapsto \frac{1}{x^4}$

3. $h : x \mapsto \ln(2x)$

Exercice 2. Déterminer une primitive, sur un intervalle à préciser, de :

1. $i : x \mapsto (e^x)^3$

2. $j : x \mapsto 2^x$

3. $k : x \mapsto \sin^2 x$

Exercice 3. Déterminer une primitive, sur un intervalle à préciser, de :

1. $f : x \mapsto \cos(2x)$,

2. $g : x \mapsto \sin(3x)$,

3. $h : x \mapsto \cos^2 x$

Correction

Exercice 1. Les fonctions suivantes admettent des primitives sur les **intervalles** où elles sont continues.

1. $f : x \mapsto x^3$
 f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
 $x \mapsto \frac{x^4}{4}$ en est une.
2. $g : x \mapsto \frac{1}{x^4}$
 g est continue sur les intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

Indication pour la recherche de primitive : écrire $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$

$x \mapsto \frac{-1}{3x^3}$ en est une primitive (sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$).

3. $h : x \mapsto \ln(2x)$
 h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.
On remarque que $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$.
De plus, $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc $x \mapsto x \ln 2 + x \ln x - x$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2.

1. $i : x \mapsto (e^x)^3$
 $i : x \mapsto e^{3x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
 $x \mapsto \frac{1}{3}e^{3x}$ en est une.
2. $j : x \mapsto 2^x$
 $j : x \mapsto e^{x \ln 2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto \frac{1}{\ln 2}e^{x \ln 2}$ en est une.
3. $k : x \mapsto \sin^2 x$
 k est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
On linéarise $\sin^2 x$ (par une formule de trigonométrie, ou par les formules d'Euler) :
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Donc $K : x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$ est une primitive de i sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$ donc elles admettent des primitives sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto \cos(2x)$,
 $F : x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. $g : x \mapsto \sin(3x)$,
 $G : x \mapsto -\frac{1}{3} \cos(3x)$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
3. $h : x \mapsto \cos^2 x$
On linéarise $\cos^2 x$ (par une formule de trigonométrie, ou par les formules d'Euler) :
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Donc $H : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.