NOM - Prénom : CORRECTION

BCPST 12
Interrogation écrite n^o2.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 2. SUJET B.

Vendredi 19 septembre 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Logique

Rappels :

- Un nombre rationnel est un nombre réel qui s'écrit $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Donc $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q},\ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\right\}$.
- Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés irrationnels.

Soient x et y deux nombres réels. On considère la proposition suivante :
$\mathcal{P}$: « Si $x+y$ est irrationnel, alors x est irrationnel ou y est irrationnel. »

1. Quelle est la contraposée de cette proposition ?
2. Démontrer cette proposition.
3. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

① La contraposée est :
$\boxed{\text{« Si } x \text{ et } y \text{ sont rationnels, alors } x+y \text{ est rationnel »}}$

② Nous allons montrer la contraposée (on sait qu'elle a la même signification que l'implication initiale)

On suppose que x et y sont rationnels.
Il existe donc $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $(p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{p'}{q'}$

Ainsi, $x + y = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$

On pose $r = pq' + p'q$ et $s = qq'$

Puisque $p, p' \in \mathbb{Z}$ et $q, q' \in \mathbb{N}^*$, on a $\begin{cases} pq' + p'q \in \mathbb{Z} \\ qq' \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Ainsi, $x + y = \frac{r}{s}$ avec $(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

Donc $x + y \in \mathbb{Q}$.

③ La réciproque est la proposition :
$\boxed{\text{« si } x \text{ ou } y \text{ est irrationnel, alors } x+y \text{ est irrationnel »}}$
Cette proposition est FAUSSE.
Par exemple, on peut poser $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$
x et y sont irrationnels (donc "x ou y est irrationnel" est VRAIE)
mais $x + y = 0$ est rationnel.

Exercice 2 - Montrer que $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

Calculons $(2-\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$

Donc $7 - 4\sqrt{3} \geq 0$ (c'est le carré d'un nombre réel), donc $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ existe, et :

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}|$

Or $\sqrt{3} < 2$ car $2 = \sqrt{4}$ et $\sqrt{3} < \sqrt{4}$ (la fonction $\sqrt{\ }$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$)

donc $2 - \sqrt{3} > 0$. Donc $|2-\sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

Ainsi, $\boxed{\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}}$

Exercice 3 - Calculer les limites suivantes en justifiant

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x)$

au $V(+\infty)$, $x^2 - \ln(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln x}{x^2} = 1$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Donc par produit des limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x) = +\infty}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-2x}$

au $V(+\infty)$, $x^3 e^{-2x} = \frac{x^3}{e^{2x}}$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-2x} = 0}$ par croissances comparées

Exercice 4 - Simplifier et écrire en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$:

$$\sum_{k=1}^{199} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

$\sum\limits_{k=1}^{199} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{199}{200}\right)$

$= (\ln(1) - \ln(2)) + (\ln(2) - \ln 3) + (\ln(3) - \ln(4)) + \dots + (\dots + \ln(199)) - \ln(200)$

simplifications

$= \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(200)$

$= -\ln(200)$ Or $200 = 2 \times 10^2 = 2 \times 2^2 \times 5^2 = 2^3 \times 5^2$

D'où $\sum\limits_{k=1}^{199} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = -\ln(2^3 \times 5^2) = \boxed{-3\ln 2 - 2\ln 5}$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 2. SUJET A.

Vendredi 19 septembre 2025.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Logique

Rappels :

- Un nombre rationnel est un nombre réel qui s'écrit $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Donc $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$.
- Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés irrationnels.

Soient a et b deux nombres réels. On considère la proposition suivante :
$\mathcal{P}$: « Si $a + b$ est irrationnel, alors a est irrationnel ou b est irrationnel. »

1. Quelle est la contraposée de cette proposition ?
2. Démontrer cette proposition.
3. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

voir Sujet B

Exercice 2 - Montrer que $\sqrt{11-6\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2}$

• $3-\sqrt{2} \geq 0$ car $\sqrt{2} \leq 3$. En effet, $3 = \sqrt{9}$. Puisque la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a bien $\sqrt{2} \leq \sqrt{9}$, d'où $\sqrt{2} \leq 3$

• $(3-\sqrt{2})^2 = 3^2 - 6\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 11 - 6\sqrt{2}$

Ainsi, $3-\sqrt{2}$ est (l'unique) nombre positif dont le carré vaut $11-6\sqrt{2}$.
Par définition de la $\sqrt{\ }$, on en déduit : $\sqrt{11-6\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2}$

Exercice 3 - Calculer les limites suivantes en justifiant

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-3x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2e^{-3x} = \dfrac{x^2}{e^{3x}}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-3x} = 0$ par croissances comparées.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - x^3$

Au $V(+\infty)$, $\ln x - x^3 = -x^3\left(1 - \dfrac{\ln x}{x^3}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^3} = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln x}{x} = 1$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$

Donc par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - x^3 = -\infty$

Exercice 4 - Simplifier et écrire en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$:

$$\sum_{k=1}^{199} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

Voir Sujet B