

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 3. SUJET A.

Vendredi 26 septembre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice - Étude de fonction

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{3x-2}{x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f . On notera $\mathcal{D}_f$ cet ensemble.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée.
3. Établir le tableau de variation de f . On détaillera les calculs des limites.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f . On fera apparaître les asymptotes et les tangentes horizontales.
5. Question bonus : montrer que la courbe de f présente un centre de symétrie et donner les coordonnées de ce point.

① Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \\ \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{donc } \boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

② f est une fraction rationnelle, donc f est dérivable sur son ensemble de définition, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \frac{3(x-1) - (3x-2)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$$

donc f est strictement décroissante sur les intervalles qui composent son ensemble de définition :

- strictement décroissante sur $] -\infty, 1[$
 - " " " sur $] 1, +\infty[$

$$\textcircled{3} \text{. au } V(+\infty) \text{ et } V(-\infty), \quad f(x) = \frac{3x(1 - \frac{2}{3x})}{x(1 - \frac{1}{x})} = 3 \times \frac{(1 - \frac{2}{3x})}{(1 - \frac{1}{x})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc par somme, produit et quotient des limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$
 $\rightarrow$ la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$

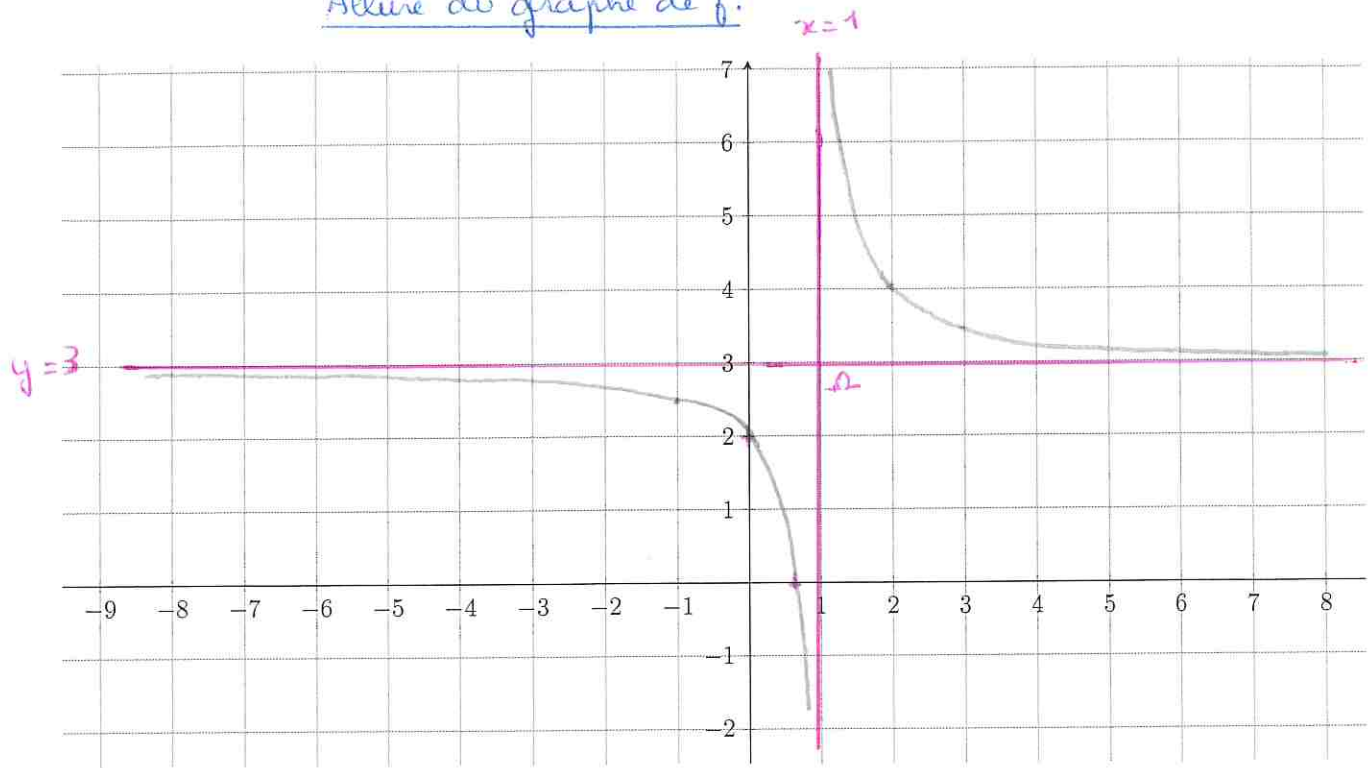
• en 1 :

$$\text{à droite : } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x-2 = 1 \end{array} \right\} \text{ donc par quotient des limites, } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{à gauche : } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x-1 = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x-2 = 1 \end{array} \right\} \text{ donc par quotient des limites, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

 $\rightarrow$ la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale.

Allure du graphe de f :



x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		-			-
f	3		2	$+\infty$	3

de plus: $f(0)=2$

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

④ Question bonus: Nous allons montrer que le point $\Omega(1,3)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.

④ Tout d'abord, on remarque que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 1: $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow 1-x \in \mathcal{D}_f$.

④ Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $1+x \in \mathcal{D}_f$ (donc $1-x \in \mathcal{D}_f$)
On pose $M(1+x, f(1+x))$ et $N(1-x, f(1-x))$

Montrons que Ω est le milieu du segment $[MN]$

- abscisse: c'est immédiat $\frac{(1+x)+(1-x)}{2} = 1$

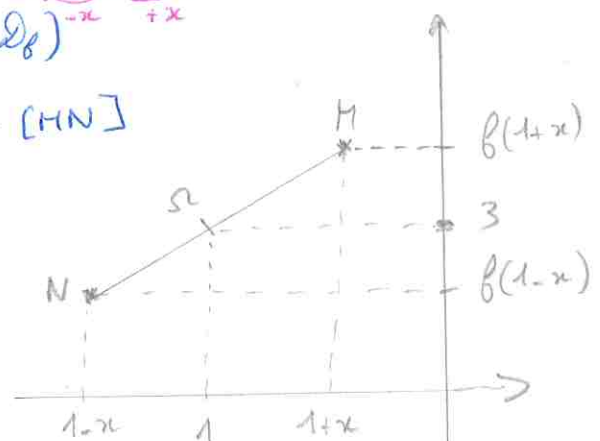
- ordonnée: montrons que $\frac{f(1+x)+f(1-x)}{2} = 3$

$$\begin{aligned} f(1+x)+f(1-x) &= \frac{3(1+x)-2}{(1+x)-1} + \frac{3(1-x)-2}{(1-x)-1} \\ &= \frac{1+3x}{x} + \frac{1-3x}{-x} = \frac{1+3x-(1-3x)}{x} = \frac{6x}{x} = 6 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{f(1+x)+f(1-x)}{2} = 3$$

Conclusion:

$\Omega(1,3)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$



INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 3. SUJET B.

Vendredi 26 septembre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice - Étude de fonction

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$

- Déterminer l'ensemble de définition de f . On notera $\mathcal{D}_f$ cet ensemble.
- Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée.
- Établir le tableau de variation de f . On détaillera les calculs des limites.
- Tracer l'allure de la courbe représentative de f . On fera apparaître les asymptotes et les tangentes horizontales.
- Question bonus : montrer que la courbe de f présente un centre de symétrie et donner les coordonnées de ce point.

① Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \\ \Leftrightarrow x \neq -1$$

Donc

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

② f est une fraction rationnelle, donc f est dérivable sur son ensemble de définition, $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

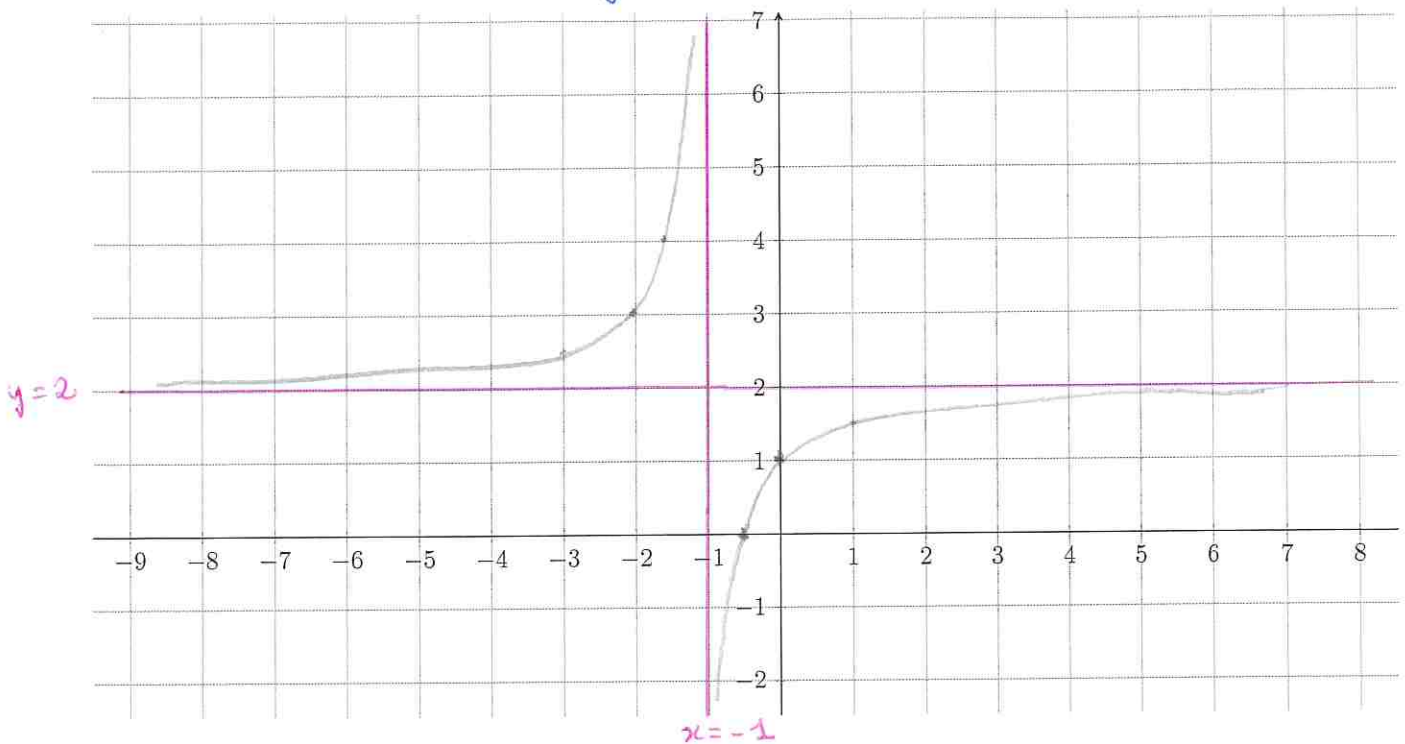
donc f est strictement croissante sur les intervalles qui composent son ensemble de définition :

- elle est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$
- elle est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$

$$\textcircled{3} \textcircled{2} \text{ Au } V(+\infty) \text{ et } V(-\infty), f(x) = \frac{2x(1 + \frac{1}{2x})}{x(1 + \frac{1}{x})} = 2 \times \frac{1 + \frac{1}{2x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme, quotient et produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
et on montre de même que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.→ la droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$ ④ en -1 :à droite : $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} 2x+1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 = 0^+ \end{array} \right\}$ donc par quotient des limites, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ à gauche : $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} 2x+1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} x+1 = 0^- \end{array} \right\}$ donc par quotient des limites, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ → la droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale.

Allure du graphe de f :



x	$-\infty$	$-1 - \frac{1}{2} 0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
f	2	$+\infty$ $-\infty$	2

de plus: $f(0) = 1$

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

(4) Question bonus: Nous allons montrer que le point $\Omega(-1, 2)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$

(a) Tout d'abord, on vérifie que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à -1
 $\forall x \in \mathbb{R}, (-1) + x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow (-1) - x \in \mathcal{D}_f$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $(-1) + x \in \mathcal{D}_f$ (donc $(-1) - x \in \mathcal{D}_f$)

On pose $M(-1+x, f(-1+x))$ et $N(-1-x, f(-1-x))$

Montrons que Ω est le milieu du segment $[MN]$:

- abscisse: c'est immédiat:

$$\frac{(-1+x) + (-1-x)}{2} = -1$$

- ordonnée: montrons que $\frac{f(-1-x) + f(-1+x)}{2} = 2$

$$\begin{aligned} f(-1-x) + f(-1+x) &= \frac{2(-1-x)+1}{(-1-x)+1} + \frac{2(-1+x)+1}{(-1+x)+1} \\ &= \frac{-1-2x}{-x} + \frac{-1+2x}{x} = \frac{1+2x}{x} + \frac{-1+2x}{x} = \frac{4x}{x} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{f(-1-x) + f(-1+x)}{2} = 2$$

Conclusion: $\Omega(-1, 2)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$

