Exos-Chronos 1

Exercice 1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Simplifier :

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{3^{i+2}}$$

Exercice 2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Simplifier :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{2k+1}}.$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2^k}, \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{2k}$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 2^{i+j}$$

Exercice 1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Simplifier : $\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{3^{i+2}}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{3^{i+2}} &= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{3^2 \times 3^i} \\
&= \frac{1}{9} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{3^i} \leftarrow \text{ somme géométrique de raison } \frac{1}{3} \neq 1 \\
&= \frac{1}{9} \times \frac{1}{3^2} \times \frac{1 - \frac{1}{3^{n-1}}}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{54} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}} \right)
\end{aligned}$$

Exercice 2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Simplifier : $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{2k+1}}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{2k+1}} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{9} \right)^k \leftarrow \text{ somme géométrique de raison } \frac{-1}{9} \neq 1 \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{9} \right) \frac{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)} \\
&= \frac{-1}{30} \left(1 - \left(-\frac{1}{9} \right)^n \right)
\end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier : $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2^k}$, et $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{2k}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{-1}{2} \right)^k \\
&= \left(1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \right)^n \text{ (formule du binôme)} \\
&= \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{2k} &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k \text{ On pense à la formule du binôme mais } \textbf{attention aux bornes !}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k\right) - \binom{n}{0} 4^0\\
&= (1+4)^n - 1 \text{ (formule du binôme)}\\
&= 5^n - 1
\end{aligned}
$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier : $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 2^{i+j}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 2^{i+j} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} \underbrace{2^i} 2^j \right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} 2^i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{i} 2^j \right)}_{\substack{\text{somme géométrique}\\ \text{de raison } 2 \neq 1}}\\
&= \sum_{i=1}^{n} 2^i \times 2 \times \frac{2^i - 1}{2-1}\\
&= 2 \sum_{i=1}^{n} 2^i (2^i - 1)\\
&= 2 \sum_{i=1}^{n} (2^{2i} - 2^i)\\
&= 2 \left(\sum_{i=1}^{n} 4^i - \sum_{i=1}^{n} 2^i \right)\\
&= 2 \left(4 \frac{4^n - 1}{4-1} - 2 \frac{2^n - 1}{2-1} \right)\\
&= \frac{2}{3} 4^{n+1} - 2^{n+2} + \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$