

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 5. SUJET A.

Vendredi 17 octobre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser : $\cos(\theta) \sin^3(\theta)$

$$\begin{aligned}
 \cos \theta \sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2i)^3} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) (e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2i)^3} [e^{4i\theta} - 3e^{2i\theta} + 3 - e^{-2i\theta} + e^{2i\theta} - 3 + 3e^{-2i\theta} - e^{-4i\theta}] \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2i)^2} \times \frac{1}{2i} [e^{4i\theta} - e^{-4i\theta} - 2(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})] \\
 &= \frac{-1}{2^3} \left[\left(\frac{e^{4i\theta} - e^{-4i\theta}}{2i} \right) - 2 \left(\frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{8} (\sin 4\theta - 2 \sin 2\theta)
 \end{aligned}$$

donc $\cos \theta \sin^3 \theta = -\frac{1}{8} \sin 4\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z + 5 = 0$

Il s'agit d'une équation du second degré,

de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 = 4 - 20 = -16 < 0$

Elle a donc 2 racines complexes conjuguées :

$$\frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i, \text{ et } \overline{1 + 2i} = 1 - 2i$$

L'ensemble des solutions est $\{1 + 2i, 1 - 2i\}$

Exercice 3

On pose $Z = 1 - e^{i\frac{\pi}{5}}$.

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{\pi}{5}$.

2. Factoriser $1 - e^{i\frac{\pi}{5}}$ par l'angle moitié.

3. En déduire le module et un argument de Z .

$$\textcircled{1} \quad Z = \underbrace{1 - \cos \frac{\pi}{5}}_{\in \mathbb{R}} - i \underbrace{\sin \frac{\pi}{5}}_{\in \mathbb{R}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\operatorname{Re}(Z) = 1 - \cos \frac{\pi}{5}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}(Z) = -\sin \frac{\pi}{5}}$$

$$\textcircled{2} \quad 1 - e^{i\frac{\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi}{10}} (e^{-i\frac{\pi}{10}} - e^{i\frac{\pi}{10}}) = \boxed{-2i e^{i\frac{\pi}{10}} \sin \frac{\pi}{10}}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad Z &= 2e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{10}} \sin \frac{\pi}{10} \quad (\text{car } -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}) \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{10} e^{-i\frac{4\pi}{10}} \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad |Z| = \underbrace{|2|}_2 \times \underbrace{\left| \sin \frac{\pi}{10} \right|}_{\sin \frac{\pi}{10} \text{ (u)}} \times \underbrace{\left| e^{-i\frac{2\pi}{5}} \right|}_1$$

$$(u) \quad 0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \sin \frac{\pi}{10} > 0 \quad (\text{car } \sin \text{ est } > 0 \text{ sur }]0, \frac{\pi}{2}[)$$

$$\text{donc} \quad \boxed{|Z| = 2 \sin \frac{\pi}{10}}$$

$$\text{et} \quad \frac{Z}{|Z|} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} \quad \text{donc} \quad \boxed{-\frac{2\pi}{5} \text{ est un argument de } Z}$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 5. SUJET B.

Vendredi 17 octobre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser : $\cos^3(\theta) \sin(\theta)$

$$\begin{aligned}
 \cos^3 \theta \sin \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) \\
 &= \frac{1}{2^3} \frac{1}{2i} (e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
 &= \frac{1}{2^3 \times 2i} [e^{4i\theta} - e^{2i\theta} + 3e^{2i\theta} - 3 + 3 - 3e^{-2i\theta} + e^{-2i\theta} - e^{-4i\theta}] \\
 &= \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2i} [e^{4i\theta} - e^{-4i\theta} + 2(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})] \\
 &= \frac{1}{8} \left[\frac{e^{4i\theta} - e^{-4i\theta}}{2i} + 2 \left(\frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{8} (\sin 4\theta + 2 \sin 2\theta)
 \end{aligned}$$

Donc $\cos^3 \theta \sin \theta = \frac{1}{8} \sin 4\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 4z + 5 = 0$ Il s'agit d'une équation du second degré.Son discriminant est $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$

Il y a donc deux racines complexes conjuguées :

$$\frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i \quad \text{et} \quad \overline{2-i} = 2+i$$

L'ensemble des solutions est $\{2-i, 2+i\}$

Exercice 3

On pose $Z = 1 - e^{i\frac{\pi}{8}}$.

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.
2. Factoriser $1 - e^{i\frac{\pi}{8}}$ par l'angle moitié.
3. En déduire le module et un argument de Z .

$$(1) \quad Z = \underbrace{1 - \cos \frac{\pi}{8}}_{\in \mathbb{R}} - i \underbrace{\sin \frac{\pi}{8}}_{\in \mathbb{R}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\begin{aligned} \operatorname{Re}(Z) &= 1 - \cos \frac{\pi}{8} \\ \operatorname{Im}(Z) &= -\sin \frac{\pi}{8} \end{aligned}}$$

$$(2) \quad 1 - e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{16}} (e^{-i\frac{\pi}{16}} - e^{i\frac{\pi}{16}}) = \boxed{-2i e^{i\frac{\pi}{16}} \sin \frac{\pi}{16}}$$

$$(3) \quad Z = 2 e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{16}} \sin \frac{\pi}{16} \quad \text{car } -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 e^{-\frac{7i\pi}{16}} \sin \frac{\pi}{16}$$

$$\text{donc } |Z| = \underbrace{|2|}_2 \times \underbrace{|e^{-\frac{7i\pi}{16}}|}_1 \times \underbrace{\left| \sin \frac{\pi}{16} \right|}_{\sin \frac{\pi}{16} \text{ (b)}}$$

$$(*) \quad 0 < \frac{\pi}{16} < \frac{\pi}{2} \text{ et } \sin \text{ est } > 0 \text{ sur }]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{donc } \sin \frac{\pi}{16} > 0$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{|Z| = 2 \sin \frac{\pi}{16}}$$

$$\text{et } \frac{Z}{|Z|} = e^{-\frac{7i\pi}{16}} \quad \text{donc } \boxed{-\frac{7\pi}{16} \text{ est un argument de } Z}$$