

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 4. SUJET A.

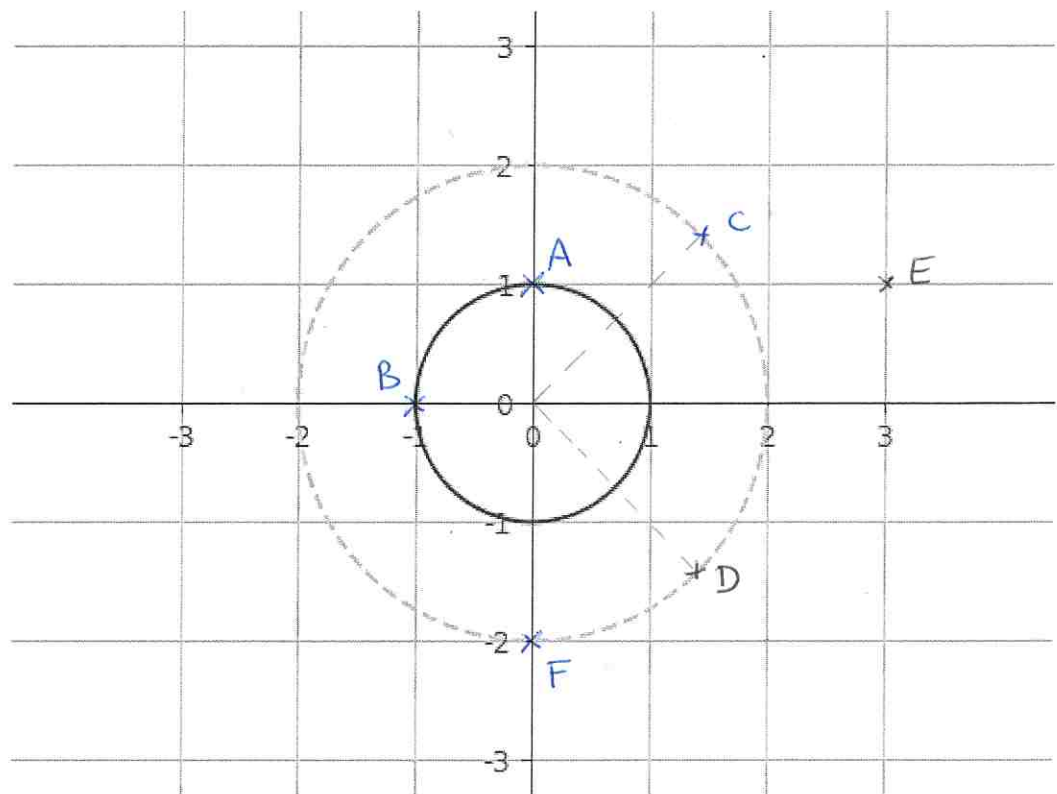
Vendredi 10 octobre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Placer dans le plan complexe les points suivants : $A(i)$, $B(e^{i\pi})$, $C(2e^{i\frac{\pi}{4}})$, $D(-2e^{i\frac{3\pi}{4}})$, $E(3+i)$, $F(-2i)$

On ne demande aucune justification.



Exercice 2

On pose $z = 1 + e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

1. Factoriser z par l'angle moitié.
2. En déduire le module et un argument de z .

$$\textcircled{1} \quad z = e^{i\frac{3\pi}{8}} \left(\underbrace{e^{-i\frac{3\pi}{8}} + e^{i\frac{3\pi}{8}}}_{2 \cos \frac{3\pi}{8}} \right)$$

donc $z = 2 \cos \frac{3\pi}{8} e^{i\frac{3\pi}{8}}$

$$\textcircled{2} \quad \text{On en déduit } |z| = |2| \times \left| \cos \frac{3\pi}{8} \right| \times \left| e^{i\frac{3\pi}{8}} \right|$$

Avec $|2| = 2$ car $2 \in \mathbb{R}_+$

$$\left| e^{i\frac{3\pi}{8}} \right| = 1$$

$0 < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ et cosinus est > 0 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos \frac{3\pi}{8} > 0$, donc $\left| \cos \frac{3\pi}{8} \right| = \cos \frac{3\pi}{8}$

Ainsi

$$|z| = 2 \cos \frac{3\pi}{8}$$

Puis: $\frac{z}{|z|} = e^{i\frac{3\pi}{8}}$. On en déduit que $\frac{3\pi}{8}$ est un argument de z

Exercice 3

On pose $a = \sqrt{3} + 3i$ et $b = 1 + i$.

1. Déterminer les formes trigonométriques de a et b .
2. On pose $c = \frac{a}{b}$. Déterminer la forme trigonométrique de c .
3. Déterminer la forme algébrique de c .
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

$$\textcircled{1} |a| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$a = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ donc}$$

$$a = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$|b| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ donc}$$

$$b = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\textcircled{2} c = \frac{2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{6} e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} \text{ donc } c = \sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\textcircled{3} c = \frac{\sqrt{3} + 3i}{1 + i} = \frac{(\sqrt{3} + 3i)(1 - i)}{1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{3} + 3i + 3}{2}$$

$$\text{donc } c = \frac{\sqrt{3} + 3}{2} + i \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \leftarrow \text{forme algébrique de } c \text{ car } \frac{\sqrt{3} + 3}{2} \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \in \mathbb{R}$$

$\textcircled{4}$ On utilise les deux expressions obtenues pour c .

D'après la forme trigonométrique de c :

$$c = \sqrt{6} \cos \frac{\pi}{12} + i \sqrt{6} \sin \frac{\pi}{12} \text{ , donc } \begin{cases} \operatorname{Re}(c) = \sqrt{6} \cos \frac{\pi}{12} \\ \operatorname{Im}(c) = \sqrt{6} \sin \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

On en déduit, d'après la forme algébrique trouvée $q^\circ(\textcircled{3})$:

$$\begin{cases} \sqrt{6} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 3}{2} \\ \sqrt{6} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ , donc}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{\sqrt{3} 2\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} &= \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} (2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

D'où

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 4. SUJET B.

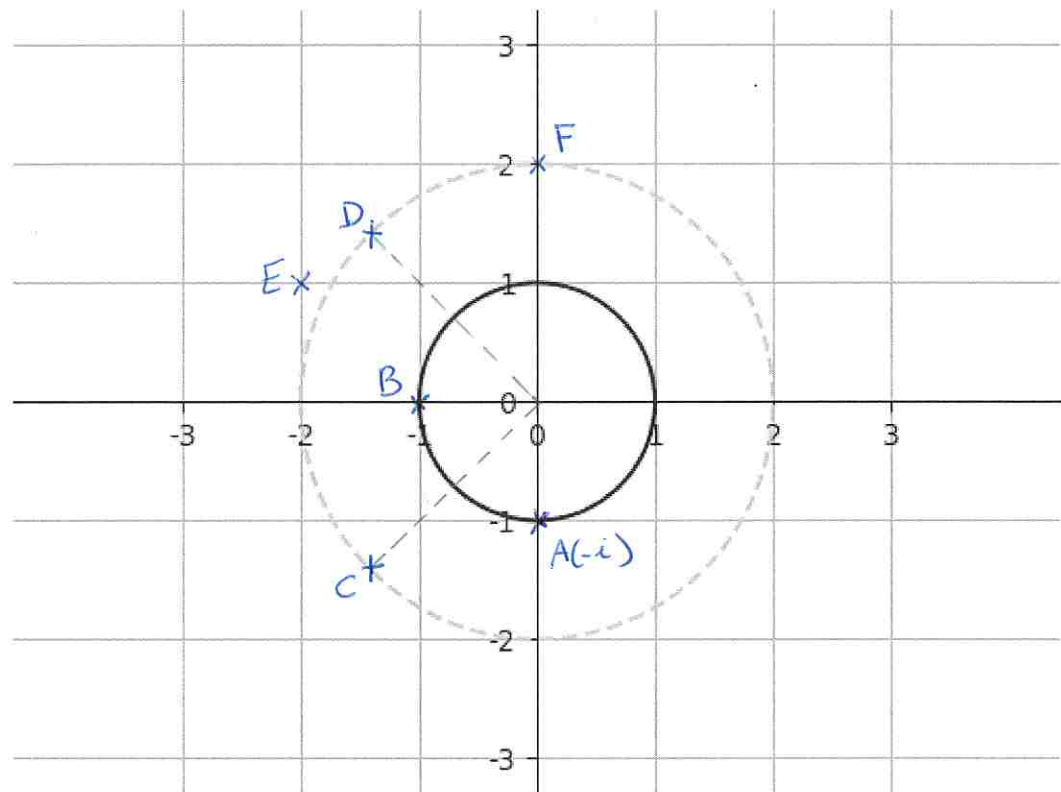
Vendredi 10 octobre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Placer dans le plan complexe les points suivants : $A(-i)$, $B(e^{i\pi})$, $C(-2ei^{\frac{\pi}{4}})$, $D(2e^{i3\frac{\pi}{4}})$, $E(-2+i)$, $F(2i)$

On ne demande aucune justification.



Exercice 2

On pose $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$.1. Factoriser z par l'angle moitié.2. En déduire le module et un argument de z .

$$\textcircled{1} \quad z = e^{i\frac{\pi}{8}} (e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}) = 2 \cos \frac{\pi}{8} e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$\textcircled{2} \quad |z| = \underbrace{|1|}_{=1} \times \underbrace{|\cos \frac{\pi}{8}|}_{\textcircled{3}} \times \underbrace{|e^{i\frac{\pi}{8}}|}_{=1}$$

$$\textcircled{3} \quad 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ et la fonction cosinus est } > 0 \text{ sur }]0, \frac{\pi}{2}[\text{ donc } \cos \frac{\pi}{8} > 0$$

$$\text{Donc } |\cos \frac{\pi}{8}| = \cos \frac{\pi}{8} (>0)$$

$$\text{Ainsi : } |z| = 2 \cos \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Puis } \frac{z}{|z|} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{8} e^{i\frac{\pi}{8}}}{2 \cos \frac{\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ donc } \frac{\pi}{8} \text{ est un argument de } z$$

Exercice 3

On pose $a = 1 + i$ et $b = 3 + i\sqrt{3}$.

1. Déterminer les formes trigonométriques de a et b .
2. On pose $c = \frac{a}{b}$. Déterminer la forme trigonométrique de c .
3. Déterminer la forme algébrique de c .
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

① $|a| = \sqrt{2}$ $a = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ donc $a = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$ est la forme trigonométrique de a
 $|b| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
 $b = 2\sqrt{3} \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right) = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$ donc $b = 2\sqrt{3} e^{i \frac{\pi}{6}}$ est la forme trigonométrique de b .

② On utilise les formes trigonométriques de a et b :
 $c = \frac{\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{3} e^{i \frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i \frac{\pi}{12}}$ avec $\frac{1}{\sqrt{6}} > 0$
 donc $c = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i \frac{\pi}{12}}$ est la forme trigonométrique de c .

③ On utilise cette fois les formes algébriques de a et b :
 $c = \frac{1+i}{3+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(3-i\sqrt{3})}{3^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{3 - i\sqrt{3} + 3i + \sqrt{3}}{12} = \frac{3+\sqrt{3}}{12} + i \frac{3-\sqrt{3}}{12}$
 donc $c = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{12} \right) + i \left(\frac{3-\sqrt{3}}{12} \right)$ est la forme algébrique de c .

④ On utilise les deux expressions obtenues pour c :
 d'une part, $c = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos \frac{\pi}{12} + i \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \frac{\pi}{12}$
 d'autre part, $c = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{12} \right) + i \left(\frac{3-\sqrt{3}}{12} \right)$.

On en déduit:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(c) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{3+\sqrt{3}}{12} \\ \operatorname{Im}(c) = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{3-\sqrt{3}}{12} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{6}(3+\sqrt{3})}{12} \text{ donc} \\ \sin \frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{6}(3-\sqrt{3})}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$