

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 7. SUJET A.

Vendredi 7 novembre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

On considère l'application

$$f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$x \mapsto \frac{3x+1}{2x-1}$$

1. Justifier que cette application est bien définie.
2. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

① On doit justifier que les ensembles de départ et d'arrivée sont cohérents :

• $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $2x-1 \neq 0$ donc $\frac{3x+1}{2x-1}$ existe.

• Montrons à présent que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\frac{3x+1}{2x-1} \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$$\frac{3x+1}{2x-1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x+1 = \frac{3}{2}(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow 3x+1 = 3x - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 = -\frac{3}{2} \text{ impossible}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\frac{3x+1}{2x-1} \neq \frac{3}{2}$, donc $\frac{3x+1}{2x-1} \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

② Soit $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ fixé quelconque. Étudions l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$: " $f(x) = y_0$ "

$$f(x) = y_0 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{2x-1} = y_0 \Leftrightarrow 3x+1 = y_0(2x-1) \Leftrightarrow (2y_0-3)x = y_0+1$$

$$\begin{aligned} &\times (2x-1) \neq 0 \\ &\div (2x-1) \neq 0 \end{aligned}$$

Or $2y_0-3 \neq 0$ car $y_0 \neq \frac{3}{2}$. Donc $f(x) = y_0 \Leftrightarrow x = \frac{y_0+1}{2y_0-3}$ (on a divisé par $2y_0-3 \neq 0$)

Montrons que $\frac{y_0+1}{2y_0-3} \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$:

$$\frac{y_0+1}{2y_0-3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y_0+1 = \frac{1}{2}(2y_0-3) \Leftrightarrow y_0+1 = y_0 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 = -\frac{3}{2} \text{ impossible}$$

donc $\frac{y_0+1}{2y_0-3} \neq \frac{1}{2}$

Donc $\frac{y_0+1}{2y_0-3} \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

L'équation admet une unique solution. Donc y_0 admet un unique antécédent qui est $\frac{y_0+1}{2y_0-3}$. Donc f est bijective, d'application réciproque:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$y \longmapsto \frac{y+1}{2y-3}$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 7. SUJET B.

Lundi 7 novembre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

On considère l'application

$$f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{3x-1}$$

1. Justifier que cette application est bien définie.
2. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

①. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$, $3x-1 \neq 0$ donc $\frac{2x+1}{3x-1}$ existe.

• De plus, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$, $\frac{2x+1}{3x-1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x+1 = \frac{2}{3}(3x-1)$
 $\Leftrightarrow 2x+1 = 2x - \frac{2}{3}$
 $\Leftrightarrow 1 = -\frac{2}{3}$ impossible

Donc $\frac{2x+1}{3x-1} \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Ainsi, cette application est bien définie

② Soit $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ fixé quelconque. Étudions l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$: $f(x) = y_0$

$f(x) = y_0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3x-1} = y_0 \Leftrightarrow 2x+1 = y_0(3x-1) \Leftrightarrow 2x+1 = 3y_0x - y_0 \Leftrightarrow (3y_0-2)x = y_0+1$
 $\xrightarrow{x(3y_0-1) \neq 0}$

Or $3y_0-2 \neq 0$ car $y_0 \neq \frac{2}{3}$. Donc $f(x) = y_0 \Leftrightarrow x = \frac{y_0+1}{3y_0-2}$

Montrons que $\frac{y_0+1}{3y_0-2} \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$:

$\frac{y_0+1}{3y_0-2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y_0+1 = \frac{1}{3}(3y_0-2) \Leftrightarrow y_0+1 = y_0 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 = -\frac{2}{3}$ impossible

Donc $\frac{y_0+1}{3y_0-2} \neq \frac{1}{3}$. Ainsi, $\frac{y_0+1}{3y_0-2} \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

L'éq. admet une unique solution. Donc y_0 admet un unique antécédent qui est $\frac{y_0+1}{3y_0-2}$. Donc f est bijective, d'application réciproque

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$y \mapsto \frac{y+1}{3y-2}$$

Exercice 2

Soit

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z^4$$

1. Montrer que g n'est pas injective.

2. Montrer que g est surjective.

Indication : écrire les complexes non-nuls sous forme trigonométrique.

$$\textcircled{1} \begin{cases} g(i) = i^4 = 1 \\ g(1) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} i, 1 \in \mathbb{C} \text{ (ens. de départ)} \text{ et } i \neq 1 \\ g(i) = g(1) \end{cases}$$

Donc g n'est pas injective.

$\textcircled{2}$ Soit $y_0 \in \mathbb{C}$ fixé quelconque.

• si $y_0 = 0$, $y_0 = g(0)$

• si $y_0 \neq 0$, il existe $(R, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $y_0 = R e^{i\theta}$

On pose $z = \sqrt[4]{R} e^{i\frac{\theta}{4}}$ - $z \in \mathbb{C}$ et $z^4 = (\sqrt[4]{R} e^{i\frac{\theta}{4}})^4 = R e^{i\theta} = y_0$

Donc $g(z) = y_0$

Dans tous les cas, on a trouvé un antécédent de y_0 . Donc g est surjective.

Exercice 3

Soient E, F, G trois ensembles et deux applications : $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$.

On pose $h = g \circ f$.

1. Montrer que si h est injective et f est surjective, alors g est injective.

2. (Bonus :) Montrer que si h est surjective et g est injective, alors f est surjective.

$\textcircled{1}$ On suppose que h est injective et que f est surjective.

Montrons que g est injective (c'est à dire : $\forall (x, x') \in F^2, g(x) = g(x') \Rightarrow x = x'$)

Soient $(x, x') \in F^2$ tels que $g(x) = g(x')$ (1)

x et $x' \in F$ (ensemble d'arrivée de f) et f est surjective, donc il existe t et $t' \in E$ tels que $f(t) = x$ et $f(t') = x'$

Ainsi $g(f(t)) = g(f(t'))$ d'après (1)

Donc $g \circ f(t) = g \circ f(t')$ - Or h est injective - On en déduit $t = t'$

donc $\underbrace{f(t)}_x = \underbrace{f(t')}_{x'}$ donc $x = x'$

Conclusion : g est injective

$\textcircled{2}$ On suppose que h est surjective et que g est injective.

Montrons que f est surjective (càd : $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$)

Soit $y \in F$ fixé quelconque

F est l'ensemble de départ de g et $y \in F$ donc on peut appliquer g à y :

$g(y) \in G$ (ensemble d'arrivée de h). Or h est surjective. Il existe donc $x \in E$ tel que $h(x) = g(y)$. Avec $h = g \circ f$ - donc $g \circ f(x) = g(y)$, c'est à dire

$g(f(x)) = g(y)$ - Or g est injective - On en déduit $f(x) = y$

Conclusion : f est surjective.