

SUITES RÉCURRENTES.

Exercice 1. Déterminer le terme général des suites suivantes en fonction de n :

1. $u_0 = -3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -u_n.$
2. $u_3 = 1, \quad \forall n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket, \quad u_{n+1} = u_n + 2.$
3. $u_1 = 2, \quad \forall n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket, \quad u_{n+1} = u_n.$
4. $u_2 = 1, \quad \forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \quad u_{n+1} = -3u_n.$
5. $u_0 = -2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n - 4.$
6. $u_1 = 1, \quad \forall n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket, \quad u_{n+1} = -u_n + 2.$
7. $u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 2u_n^3.$

Exercice 2. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \setminus \{3\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x-4}{x-3}, \end{aligned}$$

et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}.$

1. Montrer que $\forall x \in]-\infty, 2[, \quad f(x) < 2.$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_n < 2.$
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}.$
4. On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}.$$

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n . Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 3. Déterminer le terme général des suites suivantes en fonction de n :

1. $u_0 = -1, u_1 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$
2. $u_1 = 3, u_2 = 17, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n.$
3. $u_0 = 1, u_1 = -2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2}u_{n+2} - 3u_{n+1} + 6u_n = 0.$
4. $u_0 = 0, u_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 15u_{n+1} + 6u_n.$
5. $u_0 = 1, u_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 5u_{n+1} + 6u_n = 0.$
6. $u_0 = 1, u_1 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1}^2 u_n.$
7. $u_0 = 1, u_1 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} u_n}.$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}.$
2. Réciproquement, montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2},$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Correction de l'exercice 1

1. (u_n) est une suite géométrique de raison -1 et de premier terme $u_0 = -3$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0(-1)^n = -3(-1)^n = 3(-1)^{n+1}$.
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme u_3 ,
donc $\forall n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$, $u_n = u_3 + 2(n-3) = 1 + 2(n-3) = 2n - 5$.
3. (u_n) est une suite constante de premier terme $u_1 = 2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2$.
4. (u_n) est une suite géométrique de raison -3 et de premier terme $u_2 = 1$
Donc $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, $u_n = u_2(-3)^{n-2} = (-3)^{n-2}$
5. (u_n) est une suite arithmético-géométrique. On cherche ℓ tel que $\ell = 3\ell - 4$. On trouve $\ell = 2$. Ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 4 \\ \ell = 3\ell - 4 \end{cases}$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2 = 3(u_n - 2)$.

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n$.

(v_n) est une suite géométrique de raison 3 . Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^n v_0 = 3^n(u_0 - 2) = -4 \times 3^n$. Ainsi,
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - 4 \times 3^n$

6. Cette suite peut se traiter de deux façons :

Soit on reconnaît une suite arithmético-géométrique et on applique la méthode usuelle (comme à la question précédente).

Soit on conjecture, en calculant les premiers termes, que la suite est constante, de valeur 1 . Puis montre cela par récurrence.

C'est ce que nous allons faire :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : "u_n = 1"$$

(I) $u_1 = 1$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

Donc $u_n = 1$. Donc $u_{n+1} = -u_n + 2 = -1 + 2 = 1$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

(C) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1$.

7. Fait en TD

Correction de l'exercice 2

Exercice 5. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{3\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x-4}{x-3}, \end{aligned}$$

et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$.

1. Montrer que $\forall x \in]-\infty, 2[$, $f(x) < 2$.
vu en TD
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$.
vu en TD
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
Vu en TD. On trouve $\alpha = 2$

4. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

MÉTHODE : On exprime v_{n+1} et on fait apparaître v_n . Si on trouve $v_{n+1} = v_n + \text{constante}$, c'est gagné.

Si on n'y arrive pas, on exprime $v_{n+1} - v_n$ et on montre que c'est constant.

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} &= \frac{1}{\frac{u_{n+1}}{1} - 2} \\
 &= \frac{1}{f(u_n) - 2} \\
 &= \frac{1}{\frac{u_n - 4}{u_n - 3} - 2} \\
 &= \frac{1}{\frac{u_n - 4 - 2(u_n - 3)}{u_n - 3}} \\
 &= \frac{u_n - 3}{u_n - 4 - 2u_n + 6} \\
 &= \frac{u_n - 3}{-u_n + 2} \\
 &= \frac{(u_n - 2) - 1}{-(u_n - 2)} \\
 &= \frac{(u_n - 2)}{-(u_n - 2)} - \frac{1}{-(u_n - 2)} \\
 &= -1 + \frac{1}{(u_n - 2)} \\
 &= -1 + v_n
 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison -1 .

5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n . Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

On déduit de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 - n$. Or $v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{1}{1 - 2} = -1$.

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = -1 - n.}$$

Or on veut u_n . Nous savons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ donc $u_n - 2 = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{-1 - n} = \frac{-1}{n + 1}$.

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 - \frac{1}{n + 1}.}$$

Limite de u_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty \text{ donc par quotient puis somme des limites, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n+1} = 2. \quad \boxed{\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

Correction de l'exercice 3

1. $u_n = -1 + 3n$
2. $u_n = (-1)^n + 4^n$
3. $u_n = (2\sqrt{3})^n (\cos n\frac{\pi}{6} - \frac{5}{\sqrt{3}} \sin n\frac{\pi}{6})$
4. $u_n = 0$
5. $u_n = (-2)(-3)^n + 3(-2)^n$
6. $u_n = \exp[-\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(2)(1 - \sqrt{2})^n + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(2)(1 + \sqrt{2})^n]$
7. $u_n = \exp[\frac{2}{3} \ln 2 - (-\frac{1}{2})^n \frac{2}{3} \ln 2]$

Correction de l'exercice 4

1) On suppose que (u_n) est une suite arithmétique. On pose r sa raison (donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque. Alors $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_{n-1} = u_n - r$. Donc $u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n$, d'où $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$.

2) Réciproquement, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$.

Ici, on peut utiliser deux méthodes :

- 1ère méthode : (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r = \frac{1+r^2}{2} \dots$

- 2ème méthode : puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$, on a : $2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$. Si on pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n - u_{n-1}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = v_n$. Donc la suite (v_n) est constante. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = r$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$. Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison r .