

REMÉDIATION - APPLICATIONS - RÉVISIONS

Exercice 1. Soit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

1. Montrer que f est impaire.
2. Étudier les variations de f et tracer l'allure de son graphe.
3. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

Correction

1. **Montrer que f est impaire.**

Remarque : inutile de donner la définition de fonction impaire (surtout si elle est incomplète!).

• f est définie sur $\mathbb{R}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -f(x).$

Donc f est impaire.

2. **Étudier les variations de f et tracer l'allure de son graphe.**

f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ($x \mapsto \frac{1}{2}e^x$ et $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x}$) donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

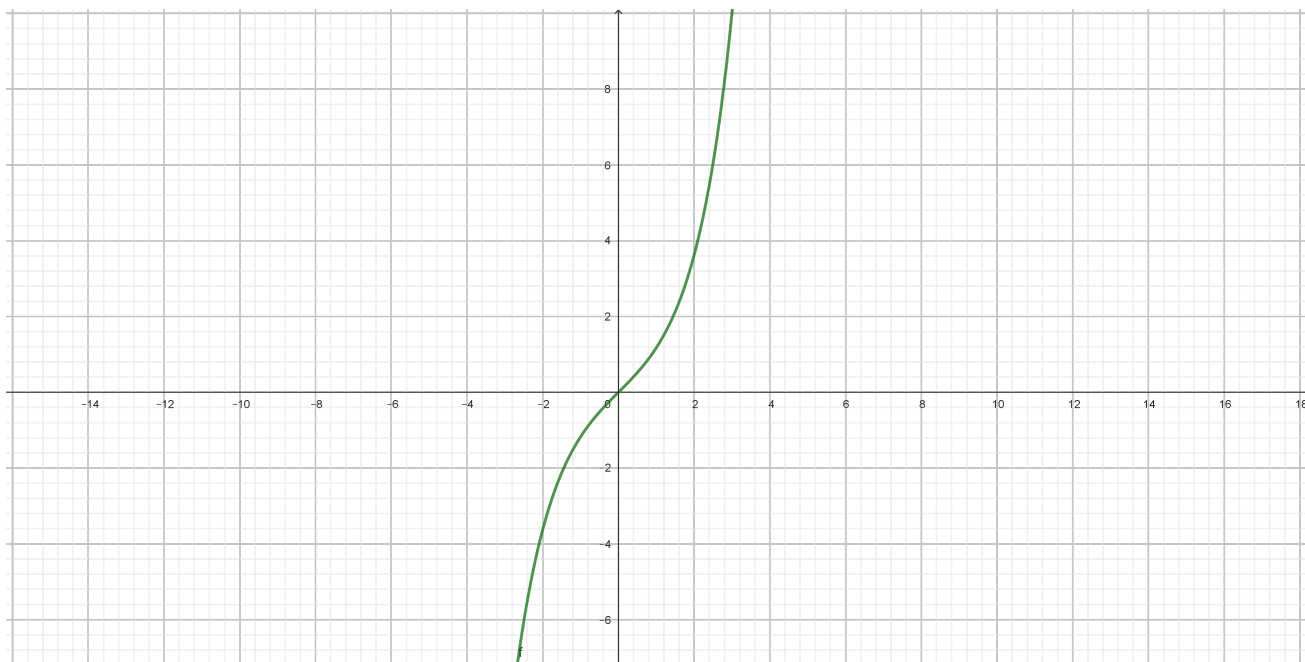
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Signe de la dérivée : f' est la somme de deux fonctions strictement positives donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par somme des limites, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. De plus $f(0) = 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
	$-\infty$	$+\infty$

Pour tracer la courbe, on se souvient que f est impaire. Donc sa courbe présente un centre de symétrie qui est le point O , origine du repère.



3. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

Remarque : comme on nous demande de prouver la bijectivité ET de trouver l'application réciproque, nous allons appliquer la méthode de résolution d'équation.

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

Étudions l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = y_0$.

$$\begin{aligned}
 f(x) = y_0 &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y_0 \\
 &\iff (e^x)^2 - 1 = 2y_0 e^x \text{ (on a multiplié par } 2e^x > 0) \\
 &\iff X^2 - 2y_0 X - 1 = 0 \text{ où on a posé } X = e^x
 \end{aligned}$$

La dernière équation est une équation du second degré, de discriminant $\Delta = 4(y_0^2 + 1) > 0$. Elle a donc deux racines qui sont (après simplification) $y_0 - \sqrt{y_0^2 + 1}$ et $y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 f(x) = y_0 &\iff X = y_0 - \sqrt{y_0^2 + 1} \text{ ou } X = y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1} \\
 &\iff \underbrace{e^x = y_0 - \sqrt{y_0^2 + 1}}_{\text{pas de solution (*)}} \text{ ou } \underbrace{e^x = y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1}}_{>0} \\
 &\iff e^x = \underbrace{y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1}}_{>0} \\
 &\iff x = \ln(y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1})
 \end{aligned}$$

L'équation admet une unique solution, donc y_0 admet un unique antécédent qui est $\ln(y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1})$.

On en déduit que f est bijective et que son application réciproque est :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \end{aligned}$$

Exercice 2. On pose $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f . On le notera $\mathcal{D}$.
2. Montrer que f est impaire.
3. Établir le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
4. f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 3.

1. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

- (a) f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
- (b) Modifier la fonction pour avoir une bijection

2. Soit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

- (a) Déterminer l'ensemble des antécédents de -1 .
- (b) Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer un antécédent de $Re^{i\theta}$.
- (c) g est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{U} \\ z &\mapsto \frac{z}{\bar{z}} \end{aligned}$$

1. Montrer que cette application est bien définie.
2. est-elle injective ? surjective ?