

Ex4 dénombrement.

① l'ensemble des tenues peut être représenté par l'ensemble:

$$\mathcal{T} = \{m, n\} \times \{bl, be, r\} \times \{v, t\} \times \{b, c\}$$

exemple: $(m, r, t, c) \in \mathcal{T}$

chaussures noires → m
pantalons rouge → r
veste en toile → t
chapeau en cuir → c

$$\text{card } \mathcal{T} = 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 24 \quad \boxed{\text{Il y a 24 tenues possibles.}}$$

② On note $\mathcal{T}_i$ l'ensemble des tenues "interdites"

$$\text{donc } \mathcal{T}_i = \{m\} \times \{r\} \times \{v, t\} \times \{b, c\}$$

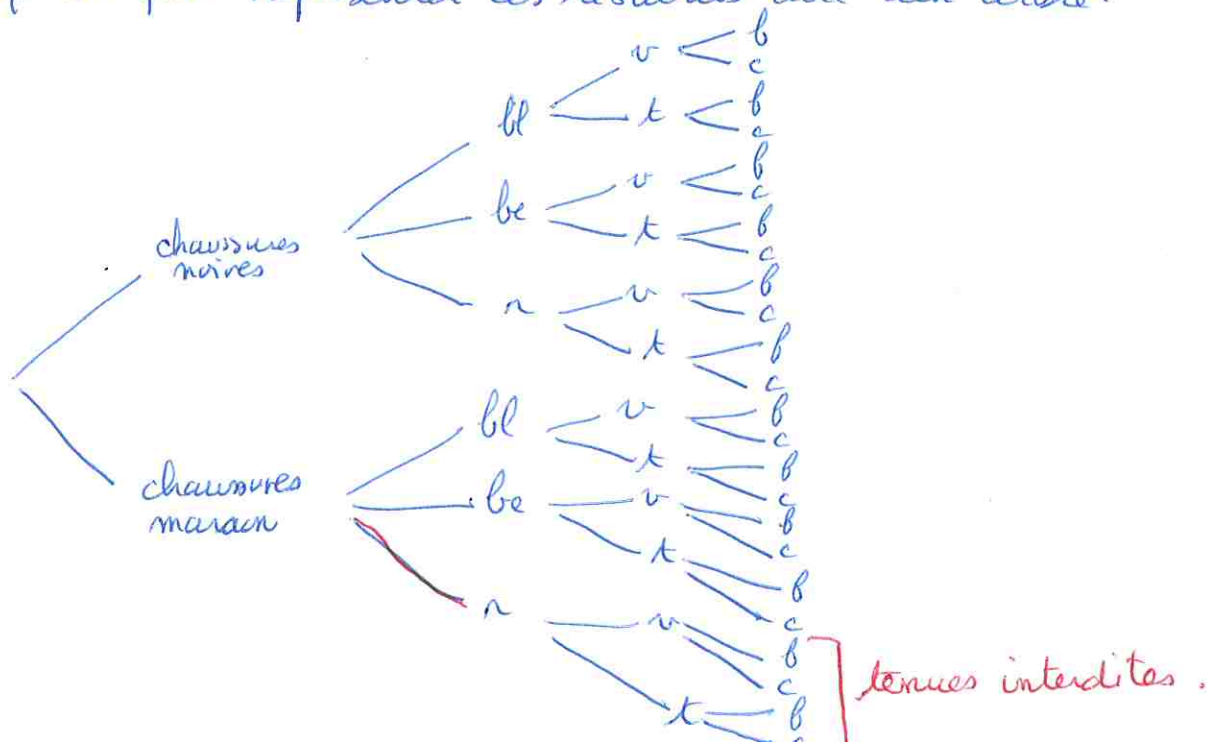
$$\text{card } \mathcal{T}_i = 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 4$$

$$\text{donc } \text{card}(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_i) = 24 - 4 = 20$$

(en fait $\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_i = \overline{\mathcal{T}_i}$)

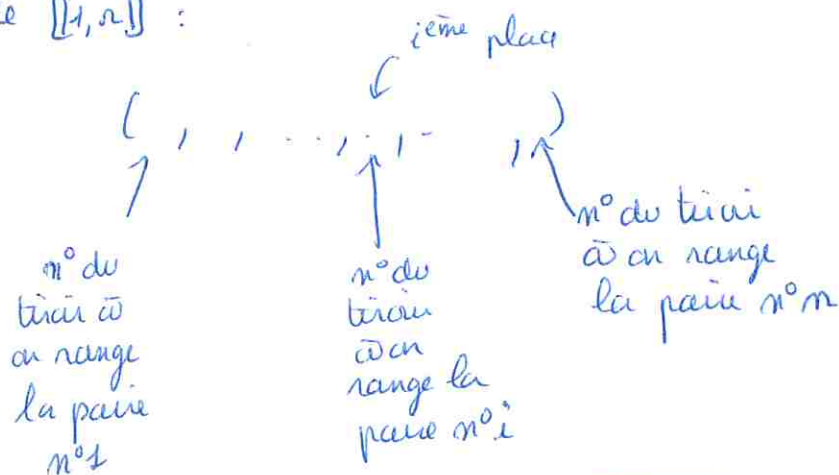
Monsieur Dupont peut porter 20 tenues différentes

Rq: On peut représenter ces résultats avec un arbre.



Ex5

- ① On numérote les paires de chaussettes de 1 à n
 Une répartition peut être représentée par une n -liste d'éléments de $[1, r]$:



Il y a donc r^n répartitions possibles

- ② $n=8$, $r=4$ donc il y a en tout 4^8 répartitions possibles
 l'ensemble des répartitions est représenté par $[1, 4]^8$
- ③ a) L'ensemble des répartitions pour lesquelles le tiroir 1 est vide est alors $[2, 4]^8$ - il est de cardinal 3^8
- b) L'ensemble des répartitions pour lesquelles les tiroirs 1 et 2 sont vides est $[3, 4]^8$ - il est de cardinal 2^8
- c) L'ensemble des répartitions pour lesquelles les tiroirs 1, 2, 3 sont vides est $\{4\}^8$, de cardinal 1 :
- Il n'y a qu'une répartition qui correspond au rangement de toutes les paires de chaussettes dans le même tiroir (n°4)

Ex 8 On veut déterminer le cardinal de l'ensemble:

$$\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \subset B\}$$

On peut écrire :

$$\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \subset B\} = \bigcup_{k=0}^n \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \subset B \text{ et } \text{card } A = k\}$$

cette réunion est une réunion d'ensembles deux à deux disjoints
donc :

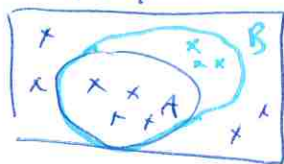
$$\text{card} \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \subset B\} = \sum_{k=0}^n \text{card} \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \subset B \text{ et } \text{card } A = k\}$$

④ Soit $k \in \{0, n\}$ fixé quelconque.

choisir un couple $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $A \subset B$ et $\text{card } A = k$, c'est :

- choisir un ensemble à k éléments $\rightarrow \binom{n}{k}$ choix.

- choisir B tel que $A \subset B$: cela revient à choisir les éléments de $B \setminus A$ dans $\bar{A}$, c'est à dire



de $\bar{A}$ - $\bar{A}$ est de cardinal $n - k$, donc il y a 2^{n-k} choix pour $B \setminus A$

Au total: $\text{card} \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \subset B \text{ et } \text{card } A = k\} = \binom{n}{k} 2^{n-k}$

⑤ On peut donc sommer pour obtenir le résultat final :

$$\text{card} \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \subset B\} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$$

↑
formule du binôme