Équations différentielles.

Exercice 1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Soit

$$g : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(u(t)) \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(at+b) \end{array}$$

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La fonction $G :\ t \mapsto F(u(t))$ est une primitive de g sur I.
2. La fonction $G :\ t \mapsto \dfrac{1}{u'(t)} F(u(t))$ est une primitive de g sur I.
3. La fonction $H :\ t \mapsto F(at+b)$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction $H :\ t \mapsto \dfrac{1}{a} F(at+b)$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Déterminer une primitive des fonctions suivantes, en précisant sur quels intervalles ces primitives sont définies :

1. $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$
2. $g : t \mapsto \cos^2 t$ (penser à linéariser)
3. $h : t \mapsto \dfrac{t}{t^2+1}$
4. $k : t \mapsto (t-2)^3$
5. $r : t \mapsto \dfrac{1}{3t-2}$
6. $s : t \mapsto \dfrac{1}{t \ln t}$

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés. On cherchera d'abord une solution particulière "évidente" (on la recherchera dans l'équation initiale, sous forme non résolue).

1. $y' \sin t - y \cos t + 1 = 0$ sur $]0, \pi[$,
2. $y' \sin t + y \cos t = \sin 2t$ sur $]0, \pi[$,
3. $(1+t)y' + y = 1 + \ln(1+t)$ sur $]-1, +\infty[$,
4. $y' + 2y = t^2 - 2t + 3$ sur $\mathbb{R}$. (chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2).

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles sur les intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas (les recherches de solutions particulières pourront se faire par la variation de la constante) :

1. $(1-t)y' + y = \dfrac{t-1}{t}$.

   Indication : pour la recherche d'une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t(t-1)}$, chercher deux réels a et b tels que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $\dfrac{1}{t(t-1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{1-t}$.
2. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$,
3. $t^2 y' - y = (t^2-1)e^t$,

4. $ty' - 2y = t^3$,
5. $(t \ln t)y' - y = -\frac{1}{t}(\ln t + 1)$, (pour la recherche d'une solution particulière, reconnaître la dérivée de $t \mapsto t \ln t$)

Exercice 5. On veut résoudre l'équation différentielle $(t+1)y' + ty = t^2 - t + 1$ sur $]-1, +\infty[$.

1. Trouver une solution polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions sur $]-1, +\infty[$. Pour la recherche de primitives, on pourra écrire $\frac{t}{t+1} = \frac{(t+1)-1}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$.
3. Déterminer la solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes : :

1. $y'' - 2y' + 5y = t$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto at + b$
2. $y'' - y' - 2y = e^{2t}$.
   On cherchera une solution particulière de la forme $t \mapsto \lambda t e^{2t}$.
3. $y'' + y' - 6y = e^{2t} + e^{-t}$. Pour la recherche d'une solution particulière, appliquer le principe de superposition. On cherchera une solution de $E_1) : y'' + y' - 6y = e^{2t}$ sous la forme $t \mapsto \lambda t e^{2t}$ et une solution de $(E_2) : y'' + y' - 6y = e^{-t}$ sous la forme $t \mapsto \mu e^{-t}$.
4. $y'' + y = \cos t + \sin 2t$. On appliquera le principe de superposition et on cherchera une solution particulière de la forme $t \mapsto \lambda t \sin t$ pour $(E_1) : y'' + y = \cos t$, et de la forme $t \mapsto \mu \sin(2t)$ pour $(E_2) : y'' + y = \sin 2t$.
5. $y'' - y' - 2y = \cos t$.
   On cherchera une solution particulière de la forme $t \mapsto \lambda \cos t + \mu \sin t$.

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données :

1. $y'' + 9y = t^2 + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
   On cherchera une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré 2.
2. $y'' - 3y' + 2y = te^t$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.
   On cherchera une solution particulière du type $t \mapsto (\lambda t^2 + \mu t)e^t$.
3. $4y'' + 4y' + y = e^{-\frac{t}{2}}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   On cherchera une solution particulière du type $t \mapsto \lambda t^2 e^{-\frac{t}{2}}$.

Exercice 8. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ fixé. Soit (E) l'équation différentielle :

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0.$$

1. Cette équation différentielle rentre t-elle dans le cadre des équations différentielles étudiées en cours ? Pourquoi ?
2. En posant $g(t) = f(e^t)$, montrer que que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si, g est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants que l'on donnera.
3. On pose $a = 1$, $b = 5$, $c = 4$ dans l'équation précédente. Donc

$$(E) : \; x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0.$$

   Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES-CORRECTION

Exercice 4 (Corrigé)

3. $\boxed{(E_3): \ x^2y' - y = (x^2-1)e^x}$.

C'est une EDL du 1er ordre sous forme non-résolue, définie sur $\mathbb{R}$.
On détermine sa forme résolue en divisant par x^2, sur tout intervalle où $x \mapsto x^2$ ne s'annule pas. On résout donc sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur R_+^*.
On pose $I = \mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$.
Sur I, l'équation (E_3) est équivalente à $y' - \dfrac{1}{x^2}y = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)e^x$.
$*$ Résolvons l'équation homogène $(H): \ y' - \dfrac{1}{x^2}y = 0$.
$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est continue sur I donc elle possède des primitives sur I. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ en est une. Donc les solutions de (H) sur I sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\frac{1}{x}}, \ C \in \mathbb{R}$.
$*$ Recherche d'une solution particulière par la variation de la constante.
Soit C une fonction dérivable sur I. Soit $f : x \mapsto C(x)e^{-\frac{1}{x}}$.
f est dérivable sur I comme produit de deux fonctions dérivables sur I, et $\forall x \in I, \ f'(x) = C'(x)e^{-\frac{1}{x}} + C(x)\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.
Déterminons une CNS sur C pour que f soit solution de E_3.

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } E_3 \text{ sur } I &\iff \forall x \in I, \ f'(x) - \frac{1}{x^2}f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^x \\
&\iff \forall x \in I, \ C'(x)e^{-\frac{1}{x}} + C(x)\frac{1}{x^2}e_C^{-\frac{1}{x}}(x)\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^x \\
&\iff \forall x \in I, \ C'(x)e^{-\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^x \\
&\iff \forall x \in I, \ C'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}} \text{ (après multiplication par } e^{\frac{1}{x}} > 0)
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}$ est continue sur I donc elle possède des primitives sur I. On reconnaît une fonction de la forme $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$, qui est la dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$.
La fonction $x \mapsto e^{x+\frac{1}{x}}$ en est donc une primitive. Ainsi, on peut poser, $\forall x \in I, \ C(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$.
Ainsi, la fonction $f : x \mapsto e^x$ est solution de (E_3).
$*$ On en déduit l'ensemble des solutions de (E_3) sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x + Ce^{-\frac{1}{x}} \end{array} \middle| \ C \in \mathbb{R} \right\}$$

4. $\boxed{(E_4): \ xy' - 2y = x^3}$.

C'est une EDL du 1er ordre sous forme non-résolue, définie sur $\mathbb{R}$.
On détermine sa forme résolue en divisant par x, sur tout intervalle où $x \mapsto x$ ne s'annule pas. On résout donc sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur R_+^*.
On pose $I = \mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$.
Sur I, l'équation (E_4) est équivalente à $y' - \dfrac{2}{x}y = x^2$.

$*$ Résolvons l'équation homogène $(H): \ y' - \dfrac{2}{x}y = 0$.

$x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ est continue sur I donc elle possède des primitives sur I. $x \mapsto -2\ln(|x|)$ en est une. Elle s'écrit aussi $x \mapsto -\ln(x^2)$. Donc les solutions de (H) sur I sont les fonctions $x \mapsto \underbrace{Ce^{\ln(x^2)}}_{Cx^2}, \ C \in \mathbb{R}$.
$*$ Recherche d'une solution particulière par la variation de la constante.
Soit C une fonction dérivable sur I. Soit $f : x \mapsto C(x)x^2$.
f est dérivable sur I comme produit de deux fonctions dérivables sur I, et $\forall x \in I, \ f'(x) = C'(x)x^2 + 2xC(x)$.

Déterminons une CNS sur C pour que f soit solution de E_4.

$$\begin{array}{lll} f \text{ est solution de } E_4 \text{ sur } I & \iff & \forall x \in I,\ f'(x) - \dfrac{2}{x}f(x) = x^2 \\ & \iff & \forall x \in I,\ C'(x)x^2 + 2xC(x) - \dfrac{2}{x}C(x)x^2 = x^2 \\ & \iff & \forall x \in I,\ C'(x)x^2 = x^2 \\ & \iff & \forall x \in I,\ C'(x) = 1 \text{ (après simplification par } x^2 > 0 \text{ sur } I) \end{array}$$

La fonction $x \mapsto 1$ est continue sur I donc elle possède des primitives sur I. La fonction $x \mapsto x$ en est une.
Ainsi, la fonction $f : x \mapsto x^3$ est solution de (E_4).
$*$ On en déduit l'ensemble des solutions de (E_4) sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$:

$$\left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + Cx^2 \end{array} \middle| \; C \in \mathbb{R} \right\}$$

5. $\boxed{(E_5) :\ (x \ln x)y' - y = -\dfrac{1}{x}(\ln x + 1)}$.

C'est une EDL du 1er ordre sous forme non-résolue, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
On détermine sa forme résolue en divisant par $x \ln$, sur tout intervalle où $x \mapsto x \ln x$ ne s'annule pas. On résout donc sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
On pose $I =]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.
Sur I, l'équation (E_5) est équivalente à $y' - \dfrac{1}{x \ln x}y = \dfrac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln x}$.

$*$ Résolvons l'équation homogène $(H) :\ y' - \dfrac{1}{x \ln x}y = 0$.

$x \mapsto -\dfrac{1}{x \ln x}$ est continue sur I donc elle possède des primitives sur I. On remarque que cette fonction est de la forme $-\dfrac{u'}{u}$ (avec $u = \ln$) donc une primitive est $-\ln |u|$. Ainsi, $x \mapsto -\ln |\ln x|$ en est une primitive.
Donc les solutions de (H) sur I sont les fonctions $x \mapsto \underbrace{Ce^{\ln |\ln x|}}_{C|\ln x|}$, $C \in \mathbb{R}$.
Remarquons que $x \mapsto \ln x$ est de signe constant sur I (soit > 0, soit < 0). Quitte à changer C en $-C$, les solutions de (H) sont les fonctions : $x \mapsto C \ln x,\ C \in \mathbb{R}$.

$*$ Recherche d'une solution particulière par la variation de la constante.
Soit C une fonction dérivable sur I. Soit $f : x \mapsto C(x) \ln x$.
f est dérivable sur I comme produit de deux fonctions dérivables sur I, et $\forall x \in I,\ f'(x) = C'(x) \ln x + \dfrac{1}{x}C(x)$.
Déterminons une CNS sur C pour que f soit solution de E_5.

$$\begin{array}{lll} f \text{ est solution de } E_5 \text{ sur } I & \iff & \forall x \in I,\ f'(x) - \dfrac{1}{x \ln x}f(x) = \dfrac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln x} \\ & \iff & \forall x \in I,\ C'(x) \ln x + \dfrac{1}{x}C(x) - \dfrac{1}{x \ln x}C(x) \ln x = \dfrac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln x} \\ & \iff & \forall x \in I,\ C'(x) \ln x = \dfrac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln x} \\ & \iff & \forall x \in I,\ C'(x) = \dfrac{\ln(x) + 1}{(x \ln x)^2} \text{ (après division par } \ln x \neq 0 \text{ sur } I) \end{array}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x) + 1}{(x \ln x)^2}$ est continue sur I donc elle possède des primitives sur I. On remarque que cette fonction est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ (avec u la fonction $x \mapsto x \ln x$), qui est la dérivée de $-\dfrac{1}{u}$. Donc la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x \ln x}$ est une primitive de cette fonction.
Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est solution de (E_5) sur I.

$*$ On en déduit l'ensemble des solutions de (E_4) sur $I =]0,1[$ ou $]1,+\infty[$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} + C\ln x \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 5 (Corrigé)

1. Une considération sur les degrés suggère de rechercher un polynôme de degré 1. On trouve (par identification des coefficients de deux polynômes) que $x \mapsto x - 2$ est solution particulière de l'équation différentielle C'est une solution sur $\mathbb{R}$ donc sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
2. Cette équation différentielle est une EDL du 1er ordre non-résolue, définie sur $\mathbb{R}$. Mais sur $]-1,+\infty[$, elle est équivalente à l'équation résolue suivante :

$$y' + \frac{x}{x+1}y = \frac{x^2 - x + 1}{x+1}.$$

Nous avons déja une solution particulière. Il ne reste qu'à déterminer les solutions de l'équation homogène.
Soit (H) : $y' + \frac{x}{x+1}y = 0$.
La fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est continue sur $]-1,+\infty[$ donc elle possède des primitives sur cet intervalle.
En écrivant $\frac{x}{x+1} = \frac{(x+1)-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, on en trouve une primitive : $x \mapsto x - \ln|x+1|$. Or $x + 1 > 0$ sur $]-1,+\infty[$ donc $\ln|x+1| = (x+1)$. Ainsi, les solutions de (H) sur $]-1,+\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \underbrace{Ce^{-x+\ln(x+1)}}_{C(x+1)e^{-x}}$, $C \in \mathbb{R}$.
On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation sur $]-1,+\infty[$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-2) + C(x+1)e^{-x} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Soit f une solution de l'équation sur $]-1,+\infty[$. D'après la question précédente, il existe C appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1,+\infty[$, $f(x) = (x-2) + C(x+1)e^{-x}$. On a :

$$\begin{aligned} f(1) = 1 &\iff (1-2) + C(1+1)e^{-1} = 1 \\ &\iff 2Ce^{-1} = 2 \\ &\iff C = e. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$ est la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-2) + (x+1)e^{1-x} \end{array}$$

exercice 6 (Corrigé)

1.
2.
3. $\boxed{y'' + y' - 6y = e^{2x} + e^{-x}}$.

C'est une EDL du second ordre à coefficients constants, définie sur $\mathbb{R}$. On la résout sur $\mathbb{R}$.
$*$ Résolvons l'équation homogène : (H) : $y'' + y' - 6y = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + r - 6 = 0$. Cette équation du second degré posséde deux racines réelles 2 et -3. Donc les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-3x}$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
$*$ Pour la recherche d'une solution particulière, on utilise le principe de superposition. On pose (E_1) : $y'' + y'_6 y = e^{2x}$ et (E_2) : $y'' + y' - 6y = e^{-x}$.
Commençons par déterminer une solution particulière de (E_1). Le second membre de (E_1) est e^{2x}. Puisque 2 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $f : x \mapsto \lambda x e^{2x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lambda e^{2x} + 3\lambda x e^{2x}$ et $f''(x) = 4\lambda e^{2x} + 4\lambda x e^{2x}$.
Déterminons une CNS pour que f soit solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{c} f \text{ est solution} \\ \text{de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} \end{array} & \iff & \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f'(x) - 6f(x) = e^{2x} \\ & \iff & \forall x \in \mathbb{R},\ 5\lambda e^{2x} = e^{2x} \\ & \iff & 5\lambda = 1 \text{ (après simplification par } e^{2x} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}) \\ & \iff & \lambda = \dfrac{1}{5} \end{array}$$

Ainsi, $f : x \mapsto \dfrac{x}{5}e^{2x}$ est une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.
Déterminons à présent une solution particulière de (E_2). Le second membre de (E_2) est e^{-x}. Puisque -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $g : x \mapsto \lambda e^{-x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -\lambda e^{-x}$ et $f''(x) = \lambda e^{-x}$.
Déterminons une CNS pour que g soit solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{c} g \text{ est solution} \\ \text{de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R} \end{array} & \iff & \forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) + g'(x) - 6g(x) = e^{-x} \\ & \iff & \forall x \in \mathbb{R},\ -6\lambda e^{-x} = e^{x} \\ & \iff & -6\lambda = 1 \text{ (après simplification par } e^{-x} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}) \\ & \iff & \lambda = -\dfrac{1}{6} \end{array}$$

Ainsi, $g : x \mapsto -\dfrac{1}{6}e^{-x}$ est une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$.
Par principe de superposition, on en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{5}e^{2x} - \dfrac{1}{6}e^{-x}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
$*$ On en déduit l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{5}e^{2x} - \dfrac{1}{6}e^{-x} + Ae^{2x} + Be^{-3x} \end{array} \middle| \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

4. $\boxed{y'' + y = \cos x + \sin 2x}$.
C'est une EDL du second ordre à coefficients constants, définie sur $\mathbb{R}$. On la résout sur $\mathbb{R}$.
$*$ Résolvons l'équation homogène : $(H) :\ y'' + y = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$. Cette équation du second degré possède deux racines complexes i et $-i$. Donc les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto A\cos x + B\sin x$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
$*$ Pour la recherche d'une solution particulière, on utilise le principe de superposition. On pose (E_1) : $y'' + y = \cos x$ et $(E_2) :\ y'' + y = \sin 2x$.
Commençons par déterminer une solution particulière de (E_1). Le second membre de (E_1) est $\cos x$. Puisque i est racine simple de l'équation caractéristique (ce que l'on voit d'ailleurs sur les solutions de (H), puisque les fonctions $x \mapsto A\cos x$ sont des solutions de (H)), on cherche une solution particulière de la forme $f : x \mapsto \lambda x\cos x + \mu x\sin x$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Après calculs, on trouve que $f : x \mapsto \dfrac{x}{2}\sin x$ est une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.
Déterminons à présent une solution particulière de (E_2). Le second membre de (E_2) est $\sin 2x$. Puisque $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique (ce que l'on voit d'ailleurs sur les solutions de (H), puisque $x \mapsto \sin 2x$ n'est pas solution de (H)), on cherche une solution particulière de la forme $g : x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2\lambda\sin(2x) + 2\mu\cos(2x)$ et $g''(x) = -4\lambda\cos(2x) - 4\mu\sin(2x)$.
Déterminons une CNS pour que g soit solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{c} g \text{ est solution} \\ \text{de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R} \end{array} & \iff & \forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) + g(x) = \sin 2x \\ & \iff & \forall x \in \mathbb{R},\ -3\lambda\cos(2x) - 3\mu\sin(2x) = \sin 2x \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{l} -3\lambda = 0 \\ -3\mu = 1 \end{array} \right. \text{ par identification des coefficients devant sin(2x) et cos(2x)} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = -\dfrac{1}{3} \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi, $g : x \mapsto -\frac{1}{3}\sin(2x)$ est une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$.
Par principe de superposition, on en déduit que la fonction $x \mapsto \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{3}\sin(2x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
$*$ On en déduit l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{3}\sin(2x) + A\cos x + B\sin x \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

5. $\boxed{(E) :\ y'' - y' - 2y = \cos x}$.
C'est une EDL du second ordre à coefficients constants, définie sur $\mathbb{R}$. On la résout sur $\mathbb{R}$.
$*$ Résolvons l'équation homogène : $(H) :\ y'' - y' - 2y = 0$, d'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$. Cette équation du second degré possède deux racines réelles -1 et 2. Donc les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
$*$ Recherche d'une solution particulire : on recherche une solution de (E) sous la forme $f : x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$, avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x)$ et $f''(x) = -\lambda\cos(x) - \mu\sin(x)$.
Déterminons une CNS pour que f soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\text{f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - f'(x) - f(x) = \cos x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (-3\lambda - \mu)\cos x + (\lambda - 3\mu)\sin x = \cos x \\
&\iff \begin{cases} -3\lambda - \mu = 1 \\ \lambda - 3\mu = 0 \end{cases} \quad \text{par identification des coefficients devant sin(x) et cos(x)} \\
&\iff \begin{cases} \lambda = -\frac{3}{10} \\ \mu = -\frac{1}{10} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $g : x \mapsto -\frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\sin(x)$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
$*$ On en déduit l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\sin(x) + Ae^{-x} + Be^{2x} \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

exercice 7 (Corrigé)

1. • L'ensemble des solutions de l'EDL $\boxed{(E) : y'' + 9y = x^2 + 1}$ est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\frac{x^2}{9} + \frac{7}{81}) + A\cos 3x + B\sin 3x \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

• Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f : x \mapsto (\frac{x^2}{9} + \frac{7}{81}) + A\cos 3x + B\sin 3x$.
Nous savons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$; sa dérivée est :
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2}{9}x - 3A\sin 3x + 3B\cos 3x$.
Déterminons une CNS sur A et B pour que f vérifie les conditions initiales données :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} A + \frac{7}{81} = 0 \\ 3B = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} A = -\frac{7}{81} \\ B = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'unique solution de cette équation différentielle qui vérifie les conditions initiales données est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{7}{81} - \dfrac{7}{81}\cos 3x \end{array}$$

2. $x \mapsto (-\dfrac{x^2}{2} - x)e^x - \dfrac{1}{2}e^x + \dfrac{2}{e}e^{2x}$
3. $x \mapsto (\dfrac{x}{2} + 1)e^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{x^2}{8}e^{-\frac{x}{2}}$.