

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 9. SUJET A.

Vendredi 28 novembre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle suivante, sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E): y' + y \tan(t) = 0$$

(E) est une EDL du premier ordre sous forme résolue, homogène (sans second membre)

La fonction $t \mapsto \tan(t)$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc elle y admet des primitives.

$t \mapsto -\ln|\cos t|$ en est une.

Donc l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \underbrace{\lambda e^{\ln|\cos t|}}_{\lambda \underbrace{|\cos t|}_{\cos(t)}}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$\cos(t)$ car $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \cos t > 0$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \lambda \cos(t), \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}}$$

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle suivante, sur $\mathbb{R}_+^*$. On cherchera une solution particulière polynomiale de degré 1.

$$(E) : y' + \frac{2}{t}y = \frac{t-1}{t}$$

(E) est une EDL du premier ordre sous forme résolue.

④ Résolution de l'équation homogène (H): $y' + \frac{2}{t}y = 0$

$t \mapsto \frac{2}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle y admet des primitives.

$t \mapsto \underbrace{2 \ln|t|}_{2 \ln t \text{ car } t > 0}$ en est une.

$$\text{Donc } y_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \underbrace{\lambda e^{-2 \ln t}}_{\lambda \times \frac{1}{t^2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

⑤ Recherche d'une solution particulière = on cherche une solution de (E) sous la forme $f: t \mapsto at+b$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) = a$.

Déterminons une CNS pour que f soit solution de (E):

$$\begin{array}{l} f \text{ est solution} \\ \text{de (E) sur} \\ \mathbb{R}_+^* \end{array} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \underbrace{a}_{f'(t)} + \frac{2}{t} \underbrace{(at+b)}_{f(t)} = \frac{t-1}{t}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{at + 2at + 2b}{t} = \frac{t-1}{t}$$

$\downarrow \times t > 0 \quad \uparrow \times \frac{1}{t}$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, 3at + 2b = t - 1$$

Il suffit que (S) $\begin{cases} 3a = 1 \\ 2b = -1 \end{cases}$ pour que f soit solution de (E). Or (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $f: t \mapsto \frac{1}{3}t - \frac{1}{2}$ est une solution de (E).

⑥ Conclusion: L'ensemble des solutions de (E) est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{3}t - \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{t^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{t}y = \frac{\ln t}{t^2}$ que l'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose (H) : $y' + \frac{1}{t}y = 0$ (équation homogène associée à (E)).

On admet que l'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$S_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\lambda}{t}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

1. Déterminer une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, par la méthode de la variation de la constante.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

① On cherche une solution de (E) sous la forme $f: t \mapsto \frac{\lambda(t)}{t}$, avec $t \mapsto \lambda(t)$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (produit de deux fonctions dérivables : $t \mapsto \lambda(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$) et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) = \frac{\lambda'(t)}{t} - \frac{\lambda(t)}{t^2}$

Déterminons une CNS pour que f soit solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de (E) sur } \mathbb{R}_+^* &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \underbrace{\frac{\lambda'(t)}{t} - \frac{\lambda(t)}{t^2}}_{f'(t)} + \underbrace{\frac{1}{t} \frac{\lambda(t)}{t}}_{f(t)} = \frac{\ln t}{t^2} \end{aligned}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\lambda'(t)}{t} = \frac{\ln t}{t^2}$$

$$\downarrow \times t > 0 \quad \uparrow \times \frac{1}{t}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \lambda'(t) = \frac{\ln t}{t} (= \frac{1}{t} \ln t, \text{ de la forme } u'v)$$

$t \mapsto \frac{1}{2}(\ln t)^2$ est une primitive de $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

On peut poser $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \lambda(t) = \frac{1}{2}(\ln t)^2$

Ainsi, la fonction $f: t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{2t}$ est une solution de (E)

② On en déduit l'ensemble des solutions de (E) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{2t} + \frac{\lambda}{t}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 9. SUJET B.

Vendredi 28 novembre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle suivante, sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E) \quad y' - y \tan(t) = 0$$

(E) est une EDL du premier ordre sous forme résolue. Elle est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et homogène (sans second membre).

La fonction $t \mapsto -\tan(t)$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc elle y admet des primitives. $t \mapsto \ln|\cos(t)|$ en est une.

Donc l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \lambda \underbrace{e^{-\ln|\cos t|}}_{\frac{1}{|\cos(t)|}}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\text{Or } \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \cos(t) > 0 \text{ donc } |\cos(t)| = \cos(t)$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{\lambda}{\cos(t)}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}}$$

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle suivante, sur $\mathbb{R}_+^*$. On cherchera une solution particulière polynomiale de degré 1.

$$(E): y' - \frac{3}{t}y = \frac{t+1}{t}$$

(E) est une EDL du premier ordre sous forme résolue.

① Résolution de l'équation homogène: (H): $y' - \frac{3}{t}y = 0$

la fonction $t \mapsto -\frac{3}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle y admet des primitives - $t \mapsto \underbrace{-3\ln|t|}_{-3\ln(t)} \text{ (car } t > 0)$

$$\text{Donc } y_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda \underbrace{e^{3\ln t}}_{t^3}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

② Recherche d'une solution particulière:

On cherche une solution de (E) sous la forme $f: t \mapsto at+b$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction affine) et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f'(t)=a$.
Déterminons une CNS pour que f soit solution de (E):

$$f \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \underbrace{a}_{f'(t)} - \frac{3}{t} \underbrace{(at+b)}_{f(t)} = \frac{t+1}{t}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{at - 3at - 3b}{t} = \frac{t+1}{t} \quad \downarrow \times t > 0 \quad \uparrow \times \frac{1}{t}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, -2at - 3b = t + 1$$

$$\text{Il suffit que } (S) \begin{cases} -2a = 1 \\ -3b = 1 \end{cases} \text{ pour que } f \text{ soit solution. Or } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi, $f: t \mapsto -\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}$ est solution de (E)

③ Conclusion: L'ensemble des solutions de (E) est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda t^3 + \left(-\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}\right), \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{\ln t}$ que l'on cherche à résoudre sur $]1, +\infty[$.

On pose (H) : $y' - \frac{1}{t}y = 0$ (équation homogène associée à (E)).

On admet que l'ensemble des solutions de (H) sur $]1, +\infty[$ est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda t, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

1. Déterminer une solution particulière de (E) sur $]1, +\infty[$, par la méthode de la variation de la constante.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]1, +\infty[$.

① On cherche une solution de (E) sous la forme $f: t \mapsto \lambda(t) \times t$, avec $t \mapsto \lambda(t)$ une fonction dérivable sur $]1, +\infty[$.
 f est dérivable sur $]1, +\infty[$ (produit de 2 fonctions dérivables sur cet ensemble) et $\forall t \in]1, +\infty[, f'(t) = \lambda'(t)t + \lambda(t)$

Déterminons une CNS pour que f soit solution de (E):

f est solution
de (E) sur
 $]1, +\infty[$

$$\Leftrightarrow \forall t \in]1, +\infty[, \underbrace{\lambda'(t)t + \lambda(t)}_{f'(t)} - \frac{1}{t} \underbrace{\lambda(t) \times t}_{f(t)} = \frac{1}{\ln t}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in]1, +\infty[, \lambda'(t)t = \frac{1}{\ln t}$$

$$\downarrow \times \frac{1}{t} \quad \uparrow \times t > 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in]1, +\infty[, \lambda'(t) = \frac{1}{t \ln t} \} \leftarrow \text{c'est } \frac{1}{t \ln t} \text{ forme " } \frac{u'}{u} \text{ "}$$

$t \mapsto \ln |\ln(t)|$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$

On peut poser $\lambda: t \mapsto \underbrace{\ln |\ln t|}$

$\ln(\ln t)$ car $\forall t \in]1, +\infty[, \ln t > 0$

Alors $f: t \mapsto t \ln(\ln t)$ est solution de (E).

② On en déduit l'ensemble des solutions de (E):

$$\left\{ \begin{array}{l}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t \ln(\ln t) + \lambda t, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$