

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 10. SUJET A.

Vendredi 5 décembre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Résoudre les équations différentielles du second ordre homogènes suivantes :

1. $(H_1) : y'' - 16y = 0$ eq^o caractéristique: $r^2 - 16 = 0$
qui a pour racines 4 et -4 (cas $\Delta > 0$)

$$\mathcal{Y}_{H_1} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto Ae^{4t} + Be^{-4t}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

2. $(H_2) : y'' + 9y = 0$ eq^o caractéristique: $r^2 + 9 = 0$
qui a pour racines 3i et -3i (cas $\Delta < 0$)

$$\mathcal{Y}_{H_2} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto A \cos(3t) + B \sin(3t), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

3. $(H_3) : y'' - 4y' + 4y = 0$ eq^o caractéristique: $\underbrace{r^2 - 4r + 4}_{(r-2)^2} = 0$
qui a pour racine (double) $r=2$ (cas $\Delta = 0$)

$$\mathcal{Y}_{H_3} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (A + Bt)e^{2t}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

4. $(H_4) : y'' - 4y' + 5y = 0$ eq^o caractéristique: $r^2 - 4r + 5 = 0$
de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 = -4 < 0$
elle a pour racines $2-i$ et $2+i$

$$\mathcal{Y}_{H_4} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{2t} (A \cos t + B \sin t), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' - 3y = -6t + 1$

1. Résoudre (E). On recherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1.
2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

① (E) est une E.D.L du second ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$.

* On résout l'équation homogène (H) : $y'' + 2y' - 3y = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + 2r - 3 = 0$ - Elle a deux racines réelles 1 et -3 (cas $\Delta > 0$)

Donc $\mathcal{Y}_H = \left\{ t \mapsto A e^t + B e^{-3t}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

* On cherche une solution particulière de (E) sous la forme,

$f: t \mapsto at + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = a, f''(t) = 0$

f est solution
de (E)
sur $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \underbrace{0}_{f''(t)} + 2 \underbrace{a}_{f'(t)} - 3 \underbrace{(at+b)}_{f(t)} = -6t + 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, -3at + 2a - 3b = -6t + 1$$

↓ par identification

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a = -6 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $f: t \mapsto 2t + 1$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$

* On en déduit l'ensemble des solutions de (E):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto 2t + 1 + A e^t + B e^{-3t}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

② Soit f une solution de (E) - Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 2t + 1 + A e^t + B e^{-3t}$$

f est dérivable (c'est une solution de (E) donc elle est deux fois dérivable) sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 2 + A e^t - 3B e^{-3t}$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + A + B = 1 \\ 2 + A - 3B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - 3B = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ -4B = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Ainsi, la solution de (E) vérifiant les conditions initiales est:

$$f: t \mapsto -e^t + e^{-3t} + 2t + 1$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 10. SUJET B.

Vendredi 5 décembre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Résoudre les équations différentielles du second ordre homogènes suivantes :

1. $(H_1) : y'' + 16y = 0$ équation caractéristique : $\lambda^2 + 16 = 0$
 de racines $4i$ et $-4i$ (cas $\Delta < 0$)

$$\mathcal{Y}_{H_1} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto A \cos(4t) + B \sin(4t) \end{array} , (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. $(H_2) : y'' - 9y = 0$ équation caractéristique : $\lambda^2 - 9 = 0$
 de racines 3 et -3

$$\mathcal{Y}_{H_2} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto A e^{3t} + B e^{-3t} \end{array} , (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3. $(H_3) : y'' + 4y' + 5y = 0$ équation caractéristique : $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$
 de discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times 5 = -4 < 0$
 elle a pour racines : $-2-i$ et $-2+i$

$$\mathcal{Y}_{H_3} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-2t} (A \cos t + B \sin t) \end{array} , (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

4. $(H_4) : y'' - 4y' + 4y = 0$ équation caractéristique : $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
 $(\lambda - 2)^2$

elle a une racine double $\lambda = 2$ (cas $\Delta = 0$)

$$\mathcal{Y}_{H_4} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (A + Bt) e^{2t} \end{array} , (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' - 3y = 6t + 1$

1. Résoudre (E). On recherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1.
2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

① (E) est une EDL du second ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$.

② L'équation homogène (H): $y'' - 2y' - 3y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 - 2r - 3 = 0$, qui a pour racines -1 et 3

donc $y_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto Ae^{-t} + Be^{3t}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

③ On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f: t \mapsto at + b$
 f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = a$, $f''(t) = 0$

f est sol^o de (E) $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $\underbrace{0}_{f''(t)} - 2\underbrace{a}_{f'(t)} - 3(\underbrace{at+b}_{f(t)}) = 6t + 1$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $-3at - 2a - 3b = 6t + 1$

$\Downarrow$ par identification

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 6 \\ -2a - 3b = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$

Ainsi, $f: t \mapsto -2t + 1$ est solution de (E)

④ Donc l'ensemble des solutions de (E) est:

$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto Ae^{-t} + Be^{3t} - 2t + 1, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

⑤ Soit f une solution de (E). Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ telles que
 $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = Ae^{-t} + Be^{3t} - 2t + 1$ - f est dérivable (c'est une solution de (E)
 donc elle est deux fois dérivable) sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -Ae^{-t} + 3Be^{3t} - 2$

$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + 1 = 1 \\ -A + 3B - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -A + 3B = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 4B = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$

Ainsi, la solution de (E) vérifiant les conditions initiales de l'énoncé est:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto -e^{-t} + e^{3t} - 2t + 1$