

PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 12.

Semaine du lundi 15 décembre au vendredi 19 décembre 2025.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de cours de la semaine précédente.
2. Formule du binôme dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Exemple : calculer les puissances  $n^{iemes}$  de :  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
3. Définition de matrice inversible. Montrer que l'inverse est unique. Donner un exemple de matrice inversible et un exemple de matrice non-inversible. Justifier.
4. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que s'il existe  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , non-nulle, telle que  $AM = 0_n$ , alors  $A$  n'est pas inversible.  
Application : soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Montrer que si  $\det(A) = 0$ , alors  $A$  n'est pas inversible (distinguer les cas où  $A = O_2$  et  $A \neq O_2$ ).
5. Définition du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2. Montrer que pour tous  $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^2$  :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = [\det(A)]I_2.$$

6. Cas particulier de l'inverse d'une matrice  $2 \times 2$ . Énoncé, démonstration. (on énoncera sans démonstration les deux lemmes utilisés).
7. Calcul pratique de l'inverse d'une matrice à l'aide d'un système. Proposition. Exemple : la matrice suivante est-elle inversible, Si oui, déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Rang d'une matrice : définition. Calcul pratique du rang par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice. Lien entre le rang d'une matrice et son inversibilité (proposition sans démonstration). Exemple : la matrice est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Thème de la colle :

Exos-chronos 4 : 3 équations au choix de l'examinateur parmi les 20 de la feuille

SYSTÈMES LINÉAIRES

Tout le cours (voir programme de la semaine 11)

MATRICES

Définitions et opérations sur les matrices

Matrice de taille  $(n, p)$ . Égalité de deux matrices. Addition. Multiplication par un scalaire. Produit matriciel. Propriétés. Transposition.

Matrices carrées

Définition. Propriétés du produit de  $M_n(\mathbb{K})$ . Matrice identité. Puissance  $n^{ieme}$  d'une matrice carrée. Formule du binôme, pour deux matrices qui commutent. Matrices inversibles : définition, exemples. Inverse d'une transposée, d'un produit, d'une puissance, de matrices inversibles. Cas particulier d'une matrice  $2 \times 2$ . Méthode pour déterminer si une matrice est inversible et, si c'est le cas, pour en déterminer l'inverse

(avec un système linéaire).

### **Quelques matrices carrées particulières**

Matrices symétriques, antisymétriques. Matrices scalaires. Matrices diagonales. Matrices triangulaires supérieures et inférieures (pour ces matrices : propriétés du produit, de la somme, conditions d'inversibilité).

### **Rang d'une matrice**

Le rang de  $A$  est le rang de tout système  $AX = B$  (on précise que le rang ne dépend pas du second membre  $B$ ). Rang d'une matrice par opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes. Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $A$  est inversible si, et seulement si,  $\text{rg}(A) = n$ .