Matrices.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$.
Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toutes matrices A, B, C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

1. $A(3B) = 3AB$
2. $A(3I_n) = 3A$
3. $(B + 2C)A = AB + 2AC$
4. $A^2 - I_n = (A + I_n)(A - I_n)$
5. $(2A)^5 = 2A^5$
6. $(2I_n)^5 = 2^5 I_n$
7. $(A + 2)A = A^2 + 2A$
8. $A(3B)(2C) = 6ABC$
9. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
10. $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$
11. $(2A)^5 = 2^5 A^5$
12. $(2A)^5 = 2^5 A$
13. $(A + I_n)A = A^2 + A$
14. $(2I_n)^5 A = 2A^5$

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Simplifier :

1. $(2A)^3(3I_n)^2$
2. $(2I_n)^4$
3. $(3I_n)^7 A^2$
4. $AI_n + (3B)^2(3I_n)$
5. $A(3I_n)B(2I_n)C^2(-I_n)^2$
6. $I_n^3(A + B)$
7. $(2I_n)(A - C)$
8. I_n^T
9. $(A + I_n)^T$
10. $(A^T + A)^T$
11. $(A^T B)^T$ et $(AA^T)^T$

Exercice 3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b)\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad d)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$

$e)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Indications :
a), c), e) : Calculer les premières puissances et trouver une formule, à démontrer ensuite par récurrence.
b) Décomposer A comme somme de deux matrices et utiliser la formule du binôme. Attention, il y a une vérification à faire avant d'appliquer la formule du binôme !
d) Décomposer A comme somme de deux matrices et utiliser la formule du binôme. On pourra faire apparaître la matrice précédente (c) et la matrice identité dans la somme.
f) Décomposer A comme somme de deux matrices et utiliser la formule du binôme. On pourra faire apparaître la matrice précédente (e) et la matrice identité dans la somme.
g) Décomposer A comme somme de deux matrices (dont l'une est un multiple de la matrice identité) et utiliser la formule du binôme.

Exercice 4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$.

3. Déterminer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. Montrer que (a_n) et (b_n) sont des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 et déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n.
5. En déduire la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$, puis déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Exprimer A en fonction de D, P, P^{-1}, puis A^n en fonction de D, P, P^{-1} et n.
4. En déduire une expression de A^n en fonction de n.
5. On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par la donnée de leurs premiers termes, respectivement x_0, y_0 et z_0, et de la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - z_n \\ y_{n+1} = -4x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases} \quad \text{et on pose :} \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre X_{n+1}, X_n et A.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de A, n et X_0.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, non-nulle, telle que $AB = 0_n$, alors A n'est pas inversible.
2. Montrer que s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, non-nulle, telle que $BA = 0_n$, alors A n'est pas inversible.
3. On suppose que $A^2 - 2A - \alpha I_2 = 0_n$ et que $A \neq 2I_2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{K}$ pour que A soit inversible

Exercice 7. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$.

1. Donner des exemples de telles matrices.
2. Montrer qu'une matrice nilpotente ne peut pas être inversible.
3. On suppose que N et M sont deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que $N + M$ et NM sont nilpotentes. Le résultat est-il vrai si les matrices ne commutent pas ?
4. Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} N^k$. Montrer que cette suite est constante à partir d'un certain rang.
5. Déterminer $(I_n - N)A_q$ et $A_q(I_n - N)$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.

Fin du corrigé de l'exercice 5

1.
2.
3.
4. En calculant $A = (PD^n)P^{-1}$ (on peut aussi calculer en écrivant $A^n = P(D^nP^{-1})$: on met les parenthèses où on veut car le produit matriciel est associatif), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1-2^n \\ -2^{n+1} & 0 & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et $A^0 = I_3$.

5. On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par la donnée de leurs premiers termes, respectivement x_0, y_0 et z_0, et de la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - z_n \\ y_{n+1} = -4x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases} \quad \text{et on pose :} \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

(a) On constate que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
(effectuer le produit matriciel au brouillon pour s'en convaincre. Dans cette question il n'y a rien à prouver)

(b) La relation entre X_n et X_{n+1} ressemble à la relation définissant une suite géométrique ("$u_{n+1} = qu_n$") mais attention :
- on ne peut pas dire que (X_n) est une suite géométrique car il s'agit de matrices, et non de nombres réels
- on peut trouver la relation demandée "par analogie avec les suites géométriques" mais il faut faire attention à l'ordre du produit. En effet, $X_{n+1} = AX_n$ mais le produit "X_nA" n'est par défini, ni d'ailleurs X_0A^n !

Pour être rigoureux, on commence par exprimer X_1 et X_2 puis on établit une conjecture qu'on montre par récurrence.
$X_1 = AX_0$
$X_2 = AX_1 = A(AX_0) = (AA)X_0 = A^2X_0$
$X_3 = AX_2 = A(A^2X_0) = A^3X_0$
On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : "X_n = A^nX_0$$

etc...

(c) On déduit de la question précédente et de l'expression de A^n obtenue que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1-2^n \\ -2^{n+1} & 0 & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Donc, en effectuant le produit matriciel et en identifiant les coefficient des matrices colonnes obtenues :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} x_n = 2^nx_0 + (1-2^n)z_0 \\ y_n = -2^{n+1}x_0 + (2^{n+1}-2)z_0 \\ z_n = z_0 \end{cases}$$

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.

Corrigé de l'exercice 8

1. Quelques exemples de matrices nilpotentes : On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   On vérifie que $M^2 = O_2$ et que $N^3 = O_3$. Ces deux matrices sont donc nilpotentes.

2. Voici une façon de répondre à la question (il y en a d'autres) :
   Rappel : Nous savons (d'après le cours) que si M est inversible, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, M^p est inversible.
   Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = O_n$.
   Si M était inversible, alors M^p serait aussi inversible, or ce n'est pas le cas puisque $M^p = O_n$ (la matrice nulle n'est pas inversible).
   Donc M n'est pas inversible.

3. M et N sont deux matrices nilpotentes (qui commutent).
   Par définition, il existe donc p et q deux entiers naturels non-nuls tels que $M^p = O_n$ et $N^q = O_n$.

   Produit : $(MN)^p = M^pN^p$ car M et N commutent (attention, cette égalité n'est pas vraie si M et N ne commutent pas car $(MN)^p = (MN)(MN)...(MN)$ on ne peut pas changer l'ordre des matrices dans le produit si M et N ne commutent pas.)
   Ainsi, $(MN)^p = M^pN^p = O_nN^p = O_n$. Donc MN est une matrice nilpotente.

   Somme : Posons $r = p + q$.
   Puisque M et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme pour calculer $(M+N)^r$:

$$\begin{aligned}(M+N)^r &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} M^k N^{r-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{r}{k} M^k \underbrace{N^{r-k}}_{=O_n} + \sum_{k=p}^{r} \binom{r}{k} \underbrace{M^k}_{=O_n} N^{r-k} \\ &= O_n\end{aligned}$$

   Donc $M + N$ est nilpotente.
   Montrons que ce résultat n'est pas vrai si les matrices ne commutent pas.
   Posons

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Nous avons vu que M et N sont nilpotentes. Or $M + N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $M + N$ est inversible (son déterminant vaut -1) donc $M + N$ n'est pas nilpotente.
   Et $MN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculons : $(MN)^2$: on trouve $(MN)^2 = MN$. Donc $(MN)^3 = (MN)^2(MN) = (MN)^2 = MN$.
   Ainsi, on peut montrer par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*, (MN)^p = MN$. Donc la matrice MN n'est pas nilpotente (aucune de ses puissances n'est la matrice nulle).
   Ces deux exemples montrent que le résultat précédent n'est pas vrai si les matrices ne commutent pas.

4. N est nilpotente donc il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^{p_0} = 0_n$ (donc pour tout entier $k \geqslant p_0$, $N^k = 0_n$).
   Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q \geqslant p_0$. Alors, $A_q = \sum_{k=0}^{q} N^k = \sum_{k=0}^{p_0-1} N^k + \sum_{k=p_0}^{q} N^k$. La deuxième somme vaut 0_n car tous les N^k sont la matrice nulle. Ainsi, $A_q = \sum_{k=0}^{q} N^k = \sum_{k=0}^{p_0-1} N^k = A_{p_0-1}$. Ainsi, la suite est constante à partir d'un certain rang (à partir du rang $p_0 - 1$).

5. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ fixé. $(I_n - N)A_q = (I_n - N)(\sum_{k=0}^{q} N^k) = \sum_{k=0}^{q} N^k - N^{k+1}$ il s'agit d'une somme télescopique. D'où $(I_n - N)A_q = I_n - N^{q+1}$. On montre de même que $A_q(I_n - N) = I_n - N^{q+1}$.

Cette égalité est valable pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. En particulier, si $q = p_0$, alors $N^{p_0+1} = 0_n$. D'où :

$$A_{p_0}(I_n - N) = (I_n - N)A_{p_0} = I_n$$

On en déduit que $I_n - N$ est inversible, d'inverse A_{p_0}.