

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 11. SUJET A.

Vendredi 19 décembre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.Soit $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ fixé quelconque.Étudions le système suivant, d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$(S): AX = B$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = a \\ -x + z = b \\ -2y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = b & L1 \leftrightarrow L2 \\ -2x + y + z = a \\ -2y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = b \\ y - z = a - 2b & L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ -2y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = b \\ y - z = a - 2b \\ -z = c + 2a - 4b & L3 \leftarrow L3 + 2L2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2a + 3b - c \\ y = -a + 2b - c \\ z = -2a + 4b - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ce système est échelonné. Il est de Cramer, donc A est inversible. On termine la résolution par trouver A^{-1} .

Exercice 2 - Soit

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que B n'est pas inversible. On pourra pour cela déterminer son rang.

$$\text{rg } B = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad L1 \leftrightarrow L3$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L2 \leftarrow L2 - 3L1 \\ L3 \leftarrow L3 + 2L1 \end{array}$$

cette matrice est échelonnée,
elle est de rang 2.

Donc $\text{rg } B = 2 < 3$ - Donc B n'est pas inversible.

Exercice 3 - Soient

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles inversibles? Si oui, déterminer leur inverse.

• $\det C = 1 \times (-1) - i^2 = -1 + 1 = 0$
Donc C n'est pas inversible.

• $\det D = 1 \times (-2) - 3 \times 2 = -2 - 6 = -8 \neq 0$, donc D est inversible,

$$\text{et } D^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 11. SUJET B.

Vendredi 19 décembre 2025.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.Soit $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ fixé quelconque.Étudions le système suivant, d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$(S): AX = B$$

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} -2y + z = a \\ 2x - y - z = b \\ x - z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = c & L1 \leftrightarrow L3 \\ 2x - y - z = b \\ -2y + z = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = c \\ -y + z = b - 2c & L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ -2y + z = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = c \\ -y + z = b - 2c \\ -z = a - 2b + 4c & L3 \leftarrow L3 - 2L2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + 2b - 3c \\ y = -a + b - 2c \\ z = -a + 2b - 4c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ce système est échelonné. Il est de Cramer.
Donc A est inversible. On termine la
résolution pour déterminer A^{-1} :

donc
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 - Soit

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que B n'est pas inversible. On pourra pour cela déterminer son rang.

$$\text{rg } B = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad L1 \leftrightarrow L3$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ L3 \leftarrow L3 + 3L1 \end{array}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L2 \leftrightarrow L3$$

cette matrice est échelonnée.
elle est de rang 2

Donc $\text{rg } B = 2 < 3$, donc B n'est pas inversible

Exercice 3 - Soient

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles inversibles? Si oui, déterminer leur inverse.

$$\bullet \det C = 1 \times 1 - (-i) \times i = 1 + i^2 = 0$$

Donc C n'est pas inversible.

$$\bullet \det D = -3 \times 2 - 2 = -8 \neq 0, \text{ donc } D \text{ est inversible.}$$

$$\text{et } D^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$