Géométrie .

Exercice 1. On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les points $A(2,1)$ et $B(0,2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par O et perpendiculaire à (AB).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et de $\mathcal{D}$. On appelle Ω ce point.
4. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω, passant par O.
5. Déterminer l'intersection de (AB) et $\mathcal{C}$.

Exercice 2. On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les points $A(-1,1)$, $B(0,3)$ et $C(2,0)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC).
2. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). Déterminer les coordonnées de H.
3. Calculer l'aire du triangle ABC

Exercice 3. a est un paramètre réel non-nul. On considère, dans le plan P muni d'un repère orthonormé, les deux points $A(a,0)$ et $B(0,1)$. On considère la droite D passant par A et B et le cercle (C) contenant A B et O. Les tangentes à (C) en A et O se coupent en un point D.

1. Déterminer une équation de la droite (AB)
2. Donner une équation du cercle (C) passant par l'origine, A et B.
3. Déterminer une équation de la tangente à (C) passant par O et de la tangente à (C) passant par A.
4. Déterminer les coordonnées de D. Quelle courbe décrit D ?

Exercice 4.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé :
   (a) on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x - y + 3 = 0$. Déterminer un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$. Donner les caractéristiques de $\mathcal{D}$ (droite passant par ... et de vecteur directeur ...)
   (b) Même question avec $\mathcal{D}' : x + 1 = 0$ et $\mathcal{D}'' : 2y - 1 = 0$
   (c) on considère le système d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$
   Quel est l'ensemble décrit ? Préciser ses caractéristiques. En donner une équation cartésienne.

2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé :
   (a) Quel est l'ensemble qui a pour équation cartésienne $2x + 3y - z + 1 = 0$? Préciser ses caractéristiques.
   (b) Quel est l'ensemble qui a pour équation cartésienne $2x + 3y + 1 = 0$? Préciser ses caractéristiques.
   (c) on considère le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2 + 3t - v \\ y = 1 + t \\ z = 2 - u, \ (t, u) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

   Quel est l'ensemble décrit ? Préciser ses caractéristiques. En donner une équation cartésienne.
   (d) on considère le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   Quel est l'ensemble décrit ? Préciser ses caractéristiques. En donner une équation cartésienne.

Exercice 5. Dans l'espace, montrer que le système suivant définit une droite. En donner une représentation paramétrique et en déduire un point et un vecteur directeur.

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 6. Dans l'espace, montrer que les droites suivantes sont parallèles et donner une équation cartésienne du plan qui les contient :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 3y - 5z + 2 = 0 \end{cases} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} 2x + 3y + 2z - 3 = 0 \\ y - 4z + 5 = 0 \end{cases}$$

On commencera par justifier que ces systèmes définissent bien deux droites.

Exercice 7. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A, B, C.
2. Déterminer le projeté orthogonal du point O (origine du repère) sur $\mathcal{P}$.
3. En déduire la distance de 0 à $\mathcal{D}$.

Correction de l'exercice 1

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les points $A(2,1)$ et $B(0,2)$.

1. La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Donc elle a une équation cartésienne de la forme $x+2y+c=0$, avec $c\in\mathbb{R}$ à déterminer.
   Pour déterminer c, on exploite le fait que $B(0,2)$ appartient à la droite, donc $0+2\times2+c=0$, donc $c=-4$. $\boxed{\text{Ainsi, } x+2y-4=0 \text{ est une équation cartésienne de la droite } (AB)}$.

2. Cette droite a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc elle a une équation cartésienne de la forme $-2x+y+c=0$, avec $c\in\mathbb{R}$ à déterminer.
   Déterminons c : $O(0,0)$ appartient à $\mathcal{D}$ donc ses coordonnées vérifient son équation. Donc $-2\times0+0+c=0$. Donc $c=0$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } -2x+y=0 \text{ est une équation cartésienne de la droite } \mathcal{D}}$.

3. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection Ω de (AB) et de $\mathcal{D}$, on résout le système :
   $$\begin{cases} x+2y=4 \\ -2x+y=0 \end{cases}$$
   On trouve pour unique solution
   $$\begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{8}{5} \end{cases}$$
   $$\boxed{\text{Donc le point d'intersection de ces deux droites est } \Omega(\frac{4}{5},\frac{8}{5})}$$

4. Déterminons une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω, passant par O.
   Le rayon de ce cercle est $O\Omega=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$. On en déduit une équation cartésienne de $\mathcal{C}$: $\boxed{(x-\frac{4}{5})^2+(y-\frac{8}{5})^2=\frac{16}{5}}$.
   Ou encore (en développant) : $\boxed{x^2+y^2-\frac{8}{5}x-\frac{16}{5}y=0}$.

5. Pour déterminer l'intersection de (AB) et $\mathcal{C}$, on résout le système :
   $$(S) : \begin{cases} x+2y-4=0 \\ x^2+y^2-\frac{8}{5}x-\frac{16}{5}y=0 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
(S) \iff & \begin{cases} x = -2y + 4 = 0 \\ (-2y+4)^2 + y^2 - \dfrac{8}{5}(-2y+4) - \dfrac{16}{5}y = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x = -2y + 4 = 0 \\ (-2y+4)^2 + y^2 - \dfrac{8}{5}(-2y+4) - \dfrac{16}{5}y = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x = -2y + 4 = 0 \\ 5y^2 - 16y + \dfrac{48}{5} = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x = -2y + 4 = 0 \\ y = \dfrac{12}{5} \text{ ou } y = \dfrac{4}{5} \end{cases} \\
\iff & (x, y) = (\frac{-4}{5}, \frac{12}{5}) \text{ ou } (x, y) = (\frac{12}{5}, \frac{4}{5})
\end{aligned}
$$

Il y a donc deux points d'intersection : $C(\frac{-4}{5}, \frac{12}{5})$ et $D(\frac{12}{5}, \frac{4}{5})$