Programme de colle de la semaine 15.

Semaine du lundi 19 janvier au vendredi 23 janvier 2026.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de cours de la semaine 14.
2. Démonstration des identités suivantes, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{K}$:
   $X^n - 1 = (X-1)(1 + X + ... + X^{n-1})$ et $X^n - a^n = (X-a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}X^k\right)$.
3. Montrer que $(X-a)|P \iff P(a) = 0$
4. Généralisation du résultat précédent (énoncé pour p racines deux à deux distinctes), sans démonstration. Application : factoriser dans $\mathbb{C}[X]$: $P = 2X^2 - 3X + 1$ et $Q = X^4 - 1$.
5. Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
   Exemple : $P = (X+2)(X-3)^2(X+1)^5$.
6. Proposition : Soit a une racine de P. a est racine multiple de P si, et seulement si, ... avec démonstration d'une des deux implications ($\Rightarrow$).
7. **Facultatif :** Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que si (u_n) converge, alors sa limite est unique.
8. Montrer, en citant précisément une proposition du cours, que la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.
9. Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes. On soignera la rédaction.
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^3 + 2n - 1}{2n^3 + 5n + 2}$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = n^2 - \ln(n^{10})$.
10. Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes. On soignera la rédaction.
    (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{e^{-n}}{n^4 + 2}$.
    (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = n + 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Thème de la colle :

CALCULS
Poser 3 exercices au choix de la liste «EXOS-CHRONOS 5».

POLYNÔMES
Ensemble des polynômes
Définitions. Notation $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$. Si $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = Q(x)$, alors P et Q ont les mêmes coefficients. Opérations dans $\mathbb{K}[X]$: combinaison linéaire, produit, composition, dérivation.
Racines d'un polynôme, divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$.
Divisibilité : définition. $(X-a)$ divise P si, et seulement si, $P(a) = 0$. Généralisation de ce résultat à p racines deux à deux distinctes. Corollaire : un polynôme non-nul de degré $\leqslant n$ possède au plus n racines. Racines multiples : ordre de multiplicité d'une racine. Soit a une racine de P, a est racine multiple de P si, et seulement si, $P'(a) = 0$.

SUITES
Calculs de limites simples en utilisant :
- les opérations sur les limites,
- Le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0 est une suite qui tend vers 0.