NOM - Prénom : CORRECTION

BCPST 12
Interrogation écrite n^o12.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 12. SUJET A.

Lundi 12 janvier 2026.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

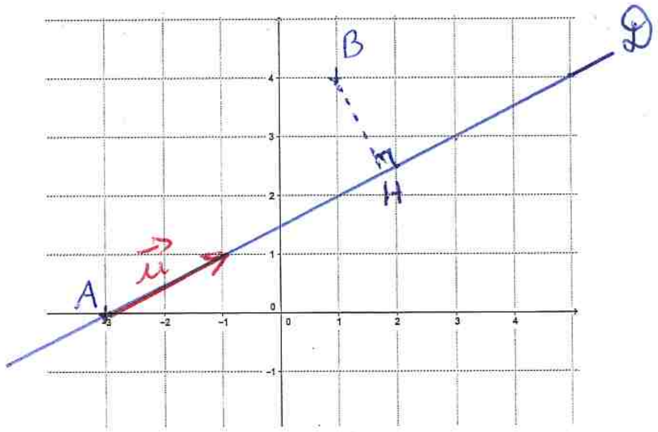
Exercice 1 - Géométrie
Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x - 2y + 3 = 0$.

1. Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

$A(-3,0) \in \mathcal{D}$ car ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{D}$

2. Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans le repère ci-dessous :



3. Soit $B(1,4)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ puis calculer la distance de B à $\mathcal{D}$.

Soit $H(x,y)$ le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$. Il vérifie : $\begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \overrightarrow{BH}\cdot\vec{u} = 0 \end{cases}$

Avec $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix}$

D'où : $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 2(x-1) + y - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x - 2y = -3 \\ 5y = 12 \quad L2 \leftarrow L2 - 2L1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{12}{5} \end{cases}$ Donc le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ est $H\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$

La distance de B à $\mathcal{D}$ est la distance BH

Or $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$ donc $BH = \|\overrightarrow{BH}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4^2}{5^2}(1+2^2)} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Ainsi, la distance de B à $\mathcal{D}$ vaut $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

Exercice 2 - Matrices

On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
3. En justifiant par une phrase, expliciter la matrice D^n, pour tout n entier naturel.
4. Exprimer A à l'aide de P, P^{-1} et D.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de P, P^{-1}, D et n. On pourra faire une démonstration par récurrence.
6. Expliciter la matrice A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) On pose $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $PQ = QP = I_2$

Donc P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) On calcule $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Puis $(P^{-1}A)P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ il s'agit d'une matrice diagonale

(3) D est une matrice diagonale, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n est aussi diagonale et on connait ses coefficients diagonaux :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

④ On a $D = P^{-1}AP$

On multiplie à gauche par P, d'où : $PD = (PP^{-1})AP = AP$

On multiplie à droite par P^{-1}, d'où : $PDP^{-1} = APP^{-1} = A$

Ainsi, $A = PDP^{-1}$

⑤ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$\mathcal{P}_n$: " $A^n = PD^nP^{-1}$ "

(I) $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

Alors
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= \underbrace{(PD^nP^{-1})}_{\text{d'après } \mathcal{P}_n}\underbrace{(PDP^{-1})}_{\text{d'après q°4}} \\ &= PD^n\underbrace{(P^{-1}P)}_{I_2}DP^{-1} \quad \text{par associativité du produit matriciel.} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \quad \text{donc } \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

(C) Ainsi, d'après le principe de récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

⑤ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

On calcule $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$, puis $(PD^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} 2-2^n & -1+2^n \\ 2-2^{n+1} & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & -1+2^n \\ 2-2^{n+1} & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 12. SUJET B.

Lundi 12 janvier 2026.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

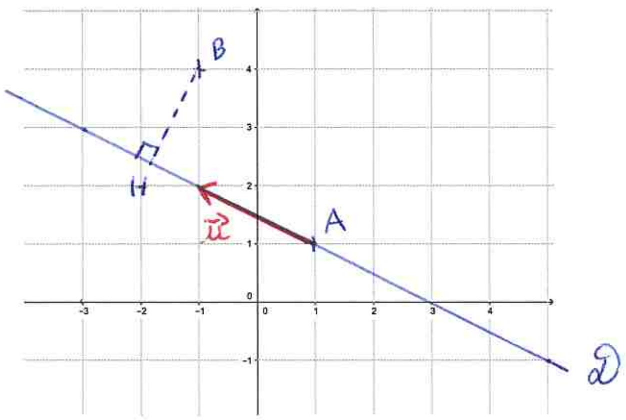
Exercice 1 - Géométrie
Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x + 2y - 3 = 0$.

1. Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

$A(1,1)$ est un point de $\mathcal{D}$

2. Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans le repère ci-dessous :



3. Soit $B(-1, 4)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ puis calculer la distance de B à $\mathcal{D}$.

Soit $H(x,y)$ un point quelconque du plan.

H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ $\iff \begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{BH} = 0 \end{cases}$ avec $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2(x+1) + y - 4 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5y = 12 \end{cases}$ $L2 \leftarrow L2 + 2L1$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{5} \\ y = \frac{12}{5} \end{cases}$

Donc $H\left(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$.

$d(B, \mathcal{D}) = BH$ avec $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$

Donc $BH = \|\overrightarrow{BH}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4^2}{5^2}(1 + 2^2)} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Ainsi, $d(B, \mathcal{D}) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Exercice 2 - Matrices

On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
3. En justifiant par une phrase, expliciter la matrice D^n, pour tout n entier naturel.
4. Exprimer A à l'aide de P, P^{-1} et D.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de P, P^{-1}, D et n. On pourra faire une démonstration par récurrence.
6. Expliciter la matrice A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

voir sujet A.